复变函数讲义

课堂笔记整理

编撰人： Clover

2026 年秋季学期

目录

第一章　复数与复变函数 3

1.1 复平面上的点集与无穷远点 3

1.2 复变函数 10

1.3 复变函数的导数与柯西–黎曼方程 18

1.4 初等解析函数 31

1.5 初等多值函数 40

1

第一章

复数与复变函数

1.1 复平面上的点集与无穷远点

复平面与距离

取定直角坐标系后，复数 $z = x + iy$ 与平面上的点 (x, y) 一一对应，这样的平面称为**复平面**（z 平面）。因此

$$\mathbb{C} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad z = x + iy \longleftrightarrow (x, y).$$

复数的模 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 就是点 z 到原点的距离，而

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

恰好是复平面上两点 z_1, z_2 的欧氏距离。所以 $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ 就是我们熟悉的度量空间 $\mathbb{R}^2$，度量空间里关于邻域、开集、闭集、连通性的那套语言可以直接搬过来用。下面用到的距离性质主要是**三角不等式**：

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \qquad \big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|.$$

邻域

设 $z_0 \in \mathbb{C}$，$r > 0$。称

$$B(z_0, r) = \{\, z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r \,\}$$

为以 z_0 为圆心、r 为半径的**开圆盘**，也叫 z_0 的 r-**邻域**；称

$$\{\, z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r \,\} = B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$$

为 z_0 的**去心邻域**。开圆盘是复平面上最基本的“一小块”，下面所有概念都是用它来定义的。

点与点集的位置关系

设 $E \subseteq \mathbb{C}$ 是一个点集，$z_0 \in \mathbb{C}$（注意 z_0 不一定属于 E）。

- 若 $\exists r > 0$，使得 $B(z_0, r) \subseteq E$，称 z_0 是 E 的**内点**。
- 若 $\exists r > 0$，使得 $B(z_0, r) \cap E = \emptyset$，称 z_0 是 E 的**外点**（即 $E^c = \mathbb{C} \setminus E$ 的内点）。
- 若 $\forall r > 0$，$B(z_0, r)$ 中既含有 E 的点，又含有不属于 E 的点，称 z_0 是 E 的**边界点**。E 的边界点全体称为 E 的**边界**，记作 ∂E。
- 若 $\forall r > 0$，去心邻域 $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ 中总含有 E 的点，称 z_0 是 E 的**聚点**。属于 E 但不是聚点的点，称为 E 的**孤立点**。

补充说明：对任一点 z_0，它相对于 E 恰好是内点、外点、边界点三者之一，不会有第四种情形，也不会同时是两种。内点一定属于 E，外点一定不属于 E，而边界点、聚点既可以属于 E，也可以不属于 E。

例

取 $E = \{\, z : |z| < 1 \,\}$（单位开圆盘）。$E$ 中每一点都是内点（对 $z_0 \in E$ 取 $r = 1 - |z_0|$，由三角不等式 $B(z_0, r) \subseteq E$）；边界 $\partial E = \{\, z : |z| = 1 \,\}$ 是单位圆周，其上的点都不属于 E；$|z| > 1$ 的点都是外点；E 的聚点是闭圆盘 $\{\, |z| \le 1 \,\}$ 中的全体点。

再取 $E = \{\, 0 < |z| < 1 \,\}$（挖去圆心的单位开圆盘）。此时 $0 \notin E$，但 0 是 E 的聚点，也是 E 的边界点。

又取 $E = \{\, 1/n : n = 1, 2, \dots \,\} \subset \mathbb{C}$（实轴上的一列点）。$E$ 中每个点都是孤立点，E 没有内点，唯一的聚点是 0，它不属于 E。

开集与闭集

定义

若 E 的每一个点都是 E 的内点，称 E 为**开集**；若 $E^c = \mathbb{C} \setminus E$ 是开集，称 E 为**闭集**。E 与它的边界的并 $\overline{E} = E \cup \partial E$ 称为 E 的**闭包**。

补充说明：闭集有一个常用的等价说法：E 是闭集 $\iff$ E 包含它的所有聚点 $\iff$ E 包含它的所有边界点。“开”和“闭”不是互补的性质——一个集合可以既开又闭（例如 $\mathbb{C}$ 和 $\emptyset$），也可以既不开也不闭（例如 $\{\, 0 < |z| \le 1 \,\}$，挖去了圆心又带着圆周）。

例

- 开圆盘 $B(z_0,r)$ 是开集：对任意 $z\in B(z_0,r)$，令 $s=r-|z-z_0|>0$，则对 $B(z,s)$ 中任一点 ζ，有 $|\zeta-z_0|\le|\zeta-z|+|z-z_0|<s+|z-z_0|=r$，即 $B(z,s)\subseteq B(z_0,r)$。
- 闭圆盘 $\{\,|z-z_0|\le r\,\}$、单个点 $\{z_0\}$、圆周 $\{\,|z-z_0|=r\,\}$ 都是闭集。
- 上半平面 $\{\,\mathrm{Im}\,z>0\,\}$ 是开集；圆环 $\{\,1<|z|<2\,\}$ 是开集。

基本开集与开集的结构

开圆盘 $B(z_0,r)$ 称为**基本开集**。复平面上的**所有开集**恰好就是**基本开集的并**：

- 任意多个开圆盘的并是开集（并集中的点属于某个开圆盘，而开圆盘是开集，所以这一点有一个整个落在并集里的邻域）；
- 反过来，若 E 是开集，对每个 $p\in E$ 都能取到 $r_p>0$ 使 $B(p,r_p)\subseteq E$，于是 $E=\bigcup_{p\in E}B(p,r_p)$ 是一族开圆盘的并。

由此可知开集有下面的基本性质：任意多个开集的并是开集；有限个开集的交是开集。这里必须强调“有限”：例如 $\bigcap_{n\ge1}B(0,\frac{1}{n})=\{0\}$ 是无穷多个开圆盘的交，却不是开集。

连通性与区域

连通

粗略地说，**连通**就是“一整块，不会断成互相分离的几部分”。对于开集 $D\subseteq\mathbb{C}$，下面两种说法是等价的：

(a) D 不能分成两个互不相交的非空开集之并；

(b) D 中任意两点，都可以用一条*完全落在 D 内*的折线连接起来。

满足其中之一，就称开集 D 是**连通**的。日常判断时用 (b) 最直观。

区域

区域就是“连通”的开集。区域 D 加上它的边界 ∂D，即 $\overline{D}=D\cup\partial D$，称为**闭区域**。

例

- 开圆盘、上半平面 $\{\,\mathrm{Im}\,z>0\,\}$、圆环 $\{\,1<|z|<2\,\}$ 都是区域；整个复平面 $\mathbb{C}$ 也是区域。
- $\{\,|z|<1\,\}\cup\{\,|z-3|<1\,\}$ 是两个互不相交的开圆盘的并，它是开集，但不连通，所以*不是*区域：从第一个圆盘里的点走到第二个圆盘里的点，折线必须经过圆盘之外。

- 闭圆盘 $\{|z|\le 1\}$ 是闭集，不是开集，所以也不是区域，但它是单位开圆盘的闭区域。

补充说明：此外，若 E 中的点的模都不超过某个常数，即 $\exists M>0$ 使 $|z|\le M$ $(\forall z\in E)$，称 E 是**有界**的，否则称为无界的。圆盘是有界的，上半平面和 $\mathbb{C}$ 是无界的。区域中还要区分“单连通”与“多连通”（圆盘中间没有洞，圆环中间有洞），这一点等到后面学习积分时才会用到，这里先不展开。

无穷远点与扩充复平面

为什么要引入无穷远点

比如当 $z\to 0$ 时，$\dfrac{1}{z}$ 的模无限增大；又或者要讨论 $z\to\infty$ 时函数的趋势。数学分析里实轴上有两个“无穷远”：$+\infty$ 与 $-\infty$，因为在实轴上只有“向右”和“向左”两种走法。但在复平面上，沿着任何方向走到离原点无限远处，都应当看作是走向同一个“终点”，所以只需添加一个点，称为**无穷远点**，记作 ∞。

复平面 $\mathbb{C}$ 添上无穷远点后得到的集合

$$\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$$

称为**扩充复平面**（也叫闭复平面）。相应地，$\mathbb{C}$ 本身称为**有限复平面**。

∞ 的邻域与 $z\to\infty$

规定 ∞ 的**邻域**是

$$\{z\in\mathbb{C}:|z|>R\}\cup\{\infty\}\qquad(R>0),$$

即“以原点为中心的某个大圆之外的所有点，再加上 ∞”。这样，$z\to\infty$ 就意味着 $|z|\to+\infty$，与 z 的辐角无关。

补充说明：∞ 是一个“理想点”，它没有实部、虚部，辐角也没有意义，规定它的模 $|\infty|=+\infty$。

关于 ∞ 的运算约定

设 $a\in\mathbb{C}$，规定：

- $a\pm\infty=\infty\pm a=\infty$；
- $a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty$ $(a\neq 0)$；
- $\dfrac{a}{\infty}=0$，$\dfrac{\infty}{a}=\infty$ $(a\neq\infty)$；$\dfrac{a}{0}=\infty$ $(a\neq 0)$。

而 $\infty\pm\infty$、$0\cdot\infty$、$\dfrac{\infty}{\infty}$、$\dfrac{0}{0}$ 都**没有意义**（和数学分析中的不定式一样，需要具体情形具体分析）。

极限里的 ∞

有了无穷远点，前面极限的定义可以自然地推广。设 z_0 是 f 的定义域 E 的聚点，则

- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ 的意思是：$\forall M>0,\ \exists \delta>0$，只要 $0<|z-z_0|<\delta$（$z\in E$），就有 $|f(z)|>M$。例如 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{z}=\infty$。
- $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=w_0$（$w_0\in\mathbb{C}$）的意思是：$\forall \varepsilon>0,\ \exists R>0$，只要 $|z|>R$（$z\in E$），就有 $|f(z)-w_0|<\varepsilon$（这里要求 E 无界，保证 ∞ 是聚点）。例如 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{z}=0$。

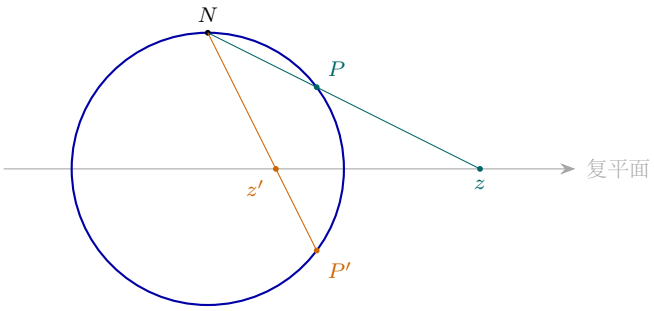
球极投影与黎曼球面

无穷远点还有一个非常直观的几何模型。取三维空间中的单位球面

$$S=\{\,(\xi_1,\xi_2,\xi_3):\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=1\,\},$$

把复平面放在赤道所在的平面 $\xi_3=0$ 上（ξ_1 轴、ξ_2 轴分别就是实轴、虚轴），并记球面的北极为 $N=(0,0,1)$。

对复平面上任一点 z，连接 N 与 z 的直线除 N 外与球面恰好再交于一点 P。这样得到的对应 $z\mapsto P$ 称为**球极投影**。下图是过复平面一条直线（如实轴）与球心的截面：



用坐标写出来，对 $z=x+iy$ 有

$$P=\left(\frac{2x}{|z|^2+1},\ \frac{2y}{|z|^2+1},\ \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right),\qquad z=\frac{\xi_1+i\xi_2}{1-\xi_3}.$$

补充说明（这两个公式怎么来的）：设 $z=x+iy$，把它看成空间中的点 $(x,y,0)$。直线 Nz 上的点可以写成

$$N+t\,(z-N)=(tx,\ ty,\ 1-t),\qquad t\in\mathbb{R}.$$

它在球面上，当且仅当 $(tx)^2+(ty)^2+(1-t)^2=1$，即 $t^2|z|^2+t^2-2t=0$，也就是 $t\big(t(|z|^2+1)-2\big)=0$。$t=0$ 对应北极 N 本身，另一个解

$$t=\frac{2}{|z|^2+1}$$

就是要找的交点 P。代回去得 $P=\left(\dfrac{2x}{|z|^2+1},\dfrac{2y}{|z|^2+1},1-\dfrac{2}{|z|^2+1}\right)$，第三个分量化简就是 $\dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$。反过来，因为 P 的第三个坐标 $\xi_3=1-t$，所以 $t=1-\xi_3$，而 $(\xi_1,\xi_2)=(tx,ty)$，于是 $z=\dfrac{\xi_1+i\xi_2}{t}=\dfrac{\xi_1+i\xi_2}{1-\xi_3}$。

观察这个对应：

- $|z|<1$ 的点对应南半球，$|z|=1$ 的点对应赤道，$|z|>1$ 的点对应北半球（如上图中 z'、z）；
- $|z|$ 越大，P 越靠近北极 N；当 $z\to\infty$ 时 $P\to N$。

因此，令北极 N 对应无穷远点 ∞，就得到整个球面 S 与扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 之间的一一对应。这样的球面称为**黎曼球面**。它解释了为什么只需要一个无穷远点：在球面上，从各个方向走向无穷远，都是走向同一个北极。

补充说明：球极投影还有一个重要性质（这里只叙述，不证明）：球面上不过 N 的圆周，对应复平面上的圆周；过 N 的圆周，对应复平面上的直线。所以在扩充复平面上，直线可以看作是“通过无穷远点的圆”，这个观点后面学习分式线性变换时会用到。

球面距离（弦距）

在扩充复平面上，∞ 到底离别的点“多远”？$|z-\infty|$ 是没有意义的，因此我们借助黎曼球面来定义距离。

定义：设 $z_1,z_2\in\widehat{\mathbb{C}}$，它们在球极投影下的像为 $P_1,P_2\in S$。把球面上这两点之间的*弦长*（即三维空间中线段 P_1P_2 的长度）

$$[z_1,z_2]:=|\overline{P_1P_2}|$$

称为 z_1,z_2 的**球面距离**（弦距）。

补充说明：注意这里取的是弦长，不是球面上沿大圆走的弧长。因为弦长就是 $\mathbb{R}^3$ 中的通常距离，所以马上可以看出：$[z_1,z_2]\geq 0$，且 $[z_1,z_2]=0\iff z_1=z_2$；$[z_1,z_2]=[z_2,z_1]$；三角不等式 $[z_1,z_3]\leq[z_1,z_2]+[z_2,z_3]$ 成立。因此 $[\cdot,\cdot]$ 给出了 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的一个距离，并且总有 $[z_1,z_2]\leq 2$（球的直径）。

公式

(1) 当 $z_1\neq\infty$，$z_2\neq\infty$ 时，

$$[z_1,z_2]=\frac{2\,|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\,\sqrt{1+|z_2|^2}}. \tag{1.9}$$

(2) 当 $z_2=\infty$ 时，

$$[\infty,z]=[z,\infty]=\frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}. \tag{1.10}$$

(1.9) 的推导

设 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$，并记 $a = |z_1|^2$，$b = |z_2|^2$。由上面的坐标公式，

$$P_1 = \Big(\frac{2x_1}{a+1}, \frac{2y_1}{a+1}, \frac{a-1}{a+1}\Big), \qquad P_2 = \Big(\frac{2x_2}{b+1}, \frac{2y_2}{b+1}, \frac{b-1}{b+1}\Big).$$

第一步：P_1, P_2 都在单位球面上，所以 $|P_1| = |P_2| = 1$，

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 - 2\,P_1 \cdot P_2 = 2 - 2\,P_1 \cdot P_2.$$

第二步：计算内积。

$$P_1 \cdot P_2 = \frac{4(x_1x_2 + y_1y_2) + (a-1)(b-1)}{(a+1)(b+1)}.$$

注意 $x_1x_2 + y_1y_2 = \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$。

第三步：代入并通分，

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = \frac{2\big[(a+1)(b+1) - (a-1)(b-1) - 4\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)\big]}{(a+1)(b+1)}.$$

括号里的前两项之差为 $(ab + a + b + 1) - (ab - a - b + 1) = 2a + 2b$，所以分子为

$$2\big[2a + 2b - 4\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)\big] = 4\big[\,|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)\big] = 4\,|z_1 - z_2|^2,$$

最后一步用的是 $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$。因此

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = \frac{4\,|z_1 - z_2|^2}{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)},$$

两边开方即得 (1.9)。 □

(1.10) 的推导

当 $z_2 = \infty$ 时 $P_2 = N = (0, 0, 1)$。设 $z \neq \infty$ 的像为 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，则由 $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$，

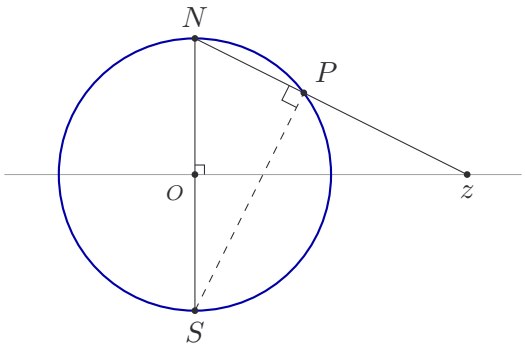
$$|\overline{PN}|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + (\xi_3 - 1)^2 = 2 - 2\xi_3 = 2 - \frac{2(|z|^2 - 1)}{|z|^2 + 1} = \frac{4}{|z|^2 + 1},$$

开方得 $[z, \infty] = \dfrac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}$，即 (1.10)。 □

补充说明（几何证法）：(1.10) 也可以用相似三角形看出来。取球的直径 NS（S 是南极），z 在复平面上，O 是球心。NS 是直径，所以 $\angle NPS = 90°$；又 $\angle NOz = 90°$，且两个直角三角形 NPS 与 NOz 有公共角 $\angle N$，所以它们相似，$\dfrac{NP}{NO} = \dfrac{NS}{Nz}$，即

$$NP \cdot Nz = NO \cdot NS = 1 \times 2 = 2.$$

而 $Nz = \sqrt{1 + |z|^2}$（直角三角形 NOz 的斜边），所以 $NP = \dfrac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}$。



注记与例

- (1.10) 可以看成 (1.9) 当 $z_2 \to \infty$ 时的极限：由于 $\dfrac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_2|^2}} \to 1$（分子分母都约等于 $|z_2|$），所以 $[z_1, z_2] \to \dfrac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}}$。这说明用 (1.10) 来定义 $[z, \infty]$ 是自然的。
- 对 $0 < \varepsilon < 2$，$[z, \infty] < \varepsilon \iff |z| > \dfrac{\sqrt{4-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$。所以球面距离意义下“$\infty$ 的 ε-邻域”就是前面规定的“大圆之外的点再加上 ∞”，两种说法是一致的；并且 $z_n \to \infty \iff [z_n, \infty] \to 0$。
- 例：$[0,1] = \dfrac{2\cdot 1}{1\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}$（南极到赤道上的点 $(1,0,0)$ 的距离）；$[1,-1] = \dfrac{2\cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 2$（赤道上的一对对径点）；$[0,\infty] = 2$（南极与北极）。
- 一般地，z 与 $-\dfrac{1}{\bar z}$ 的像是球面上的一对对径点，$[z, -1/\bar z] = 2$。

  补充说明：$[z_1, z_2]$ 与通常距离 $|z_1 - z_2|$ 的关系：若 $|z_1|, |z_2| \le M$，则

$$\frac{2}{1+M^2}\,|z_1 - z_2| \le [z_1, z_2] \le 2\,|z_1 - z_2|,$$

所以在有界范围内两种距离“差不多”，只是 $[z_1, z_2]$ 在远离原点处被压缩（球面上远处的点都挤在北极附近），这样 ∞ 也就成了一个有限距离内的点。

1.2 复变函数

预备：几个记号

本节反复用到下面这些记号，先集中回顾一下。

- 复数集 $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$。对 $z = x + iy$，称 $\bar z = x - iy$ 为它的**共轭**，$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ 为它的**模**，并且 $z\bar z = |z|^2$。
- 极坐标形式：$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$，其中 $\rho = |z|$，θ 是辐角。

- $|z-z_0|$ 就是复平面上 z 与 z_0 两点之间的距离，$\{z:|z-z_0|<\delta\}$ 是 z_0 的 δ-邻域（开圆盘），$\{z:0<|z-z_0|<\delta\}$ 是去心邻域（详见上一节）。

复变函数的定义

单值复变函数

设 $E\subseteq\mathbb{C}$ 是一个复数集。若对于任一复数 $z\in E$，都有**唯一**的复数 w 与之对应，则称在 E 上确定了一个**单值复变函数**，记作

$$w=f(z),\qquad z\in E.$$

其中 E 称为函数的**定义域**，z 称为自变量，w 称为因变量；所有函数值构成的集合 $f(E)=\{\,f(z):z\in E\,\}$ 称为**值域**。

补充说明：形式上和数学分析里的函数完全一样，只是自变量和因变量都从实数换成了复数。由于 z 与 w 各自要用两个实数（实部、虚部）来刻画，函数的“图像”需要四维空间，画不出来。所以学复变函数时，通常把 $w=f(z)$ 理解为一个**映射**：把 z 平面上的点集 E 映到 w 平面上。

注记：多值函数

我们也有**多值函数**的概念，即一个 z 可以对应多个 w，但暂不考虑，本讲义（至少目前）说的“函数”都是单值的。例如 $w=\sqrt{z}$ 在 $z=1$ 处同时对应 $w=1$ 与 $w=-1$，不满足“唯一”的要求，所以它是多值的，需要另外处理。

几个例子

- $f(z)=z$，$z\in\mathbb{C}$。（恒等映射）
- $f(z)=\dfrac{1}{z}$，$z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$。（$z=0$ 时没有意义，必须从定义域中去掉）
- $f(z)=\bar{z}$，$z\in\mathbb{C}$。（把每个点映到它关于实轴的对称点）

复变函数的实部与虚部

直角坐标下的写法

令 $z=x+iy$（$x,y\in\mathbb{R}$），把函数值的实部、虚部分别记作 u,v，即

$$f(z)=u+iv\quad\Longrightarrow\quad u=u(x,y),\quad v=v(x,y).$$

于是有常用写法

$$w=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y).$$

补充说明：这说明一个复变函数 f 本质上就是**两个**关于两个实变量 (x,y) 的实值函数 u,v 拼在一起，也就是一个从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的映射。这个观点很有用：复变函数的很多性质，最后都可以翻译成 u,v 这两个二元实函数的性质（后面的极限、连续就是这样）。

极坐标下的写法

若 $z=\rho e^{i\theta}$，则同样可以把 w 写成 ρ,θ 的函数：

$$w=f(z)=u(\rho,\theta)+i\,v(\rho,\theta).$$

例：求实部与虚部

- $f(z)=z=x+iy$：$u(x,y)=x$，$v(x,y)=y$。
- $f(z)=\bar z=x-iy$：$u(x,y)=x$，$v(x,y)=-y$。
- $f(z)=\dfrac{1}{z}$：分子分母同乘 $\bar z$，利用 $z\bar z=|z|^2$，

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{\bar z}{|z|^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\,\frac{y}{x^2+y^2},$$

即 $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$v(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ $((x,y)\neq(0,0))$。

- （补充）$f(z)=z^2$：$z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i\,2xy$，即 $u=x^2-y^2$，$v=2xy$。

对极坐标形式，同样的例子写成：

$$z^2=\rho^2e^{2i\theta}=\rho^2\cos 2\theta+i\,\rho^2\sin 2\theta,\qquad \frac{1}{z}=\frac{1}{\rho}\,e^{-i\theta}=\frac{\cos\theta}{\rho}-i\,\frac{\sin\theta}{\rho}.$$

可以看出，z^2 在极坐标下“模平方、辐角加倍”，比直角坐标下的 u,v 更直观；$1/z$ 则是“模取倒数、辐角反号”。

复变函数的极限

回顾：集合的聚点

回顾上一节：设 $E\subseteq\mathbb{C}$，$z_0\in\mathbb{C}$。如果 z_0 的**每一个**去心邻域里都含有 E 中的点，即

$$\forall\,\delta>0,\qquad \{\,z:0<|z-z_0|<\delta\,\}\cap E\neq\emptyset,$$

则称 z_0 为 E 的一个**聚点**。直观地说：E 中有点可以任意接近 z_0（但不等于 z_0）。聚点不一定属于 E，例如 $E=\{z:0<|z|<1\}$ 时，0 是 E 的聚点，但 $0\notin E$。

补充说明：要谈“$z\to z_0$ 时 $f(z)$ 的变化趋势”，首先得保证 E 里真的有点可以趋近 z_0，否则这句话没有意义——这就是下面的定义要求 z_0 是聚点的原因。

极限的定义

设 $w=f(z)$ 在 $E\subseteq\mathbb{C}$ 上定义，z_0 为 E 的一个聚点。如果

$$\exists w_0\in\mathbb{C},\ \text{s.t. }\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \text{只要}0<|z-z_0|<\delta\ (z\in E),\ \text{就有}\ |f(z)-w_0|<\varepsilon,$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 处有**极限** w_0。记号：

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0.$$

补充说明（几何意义）：$|f(z)-w_0|<\varepsilon$ 说的是 $f(z)$ 落在 w_0 为圆心、ε 为半径的开圆盘里。所以定义的意思是：无论在 w 平面上把 w_0 周围的圆盘取得多小（半径 ε），总能在 z 平面上找到 z_0 的一个足够小的去心邻域（半径 δ），使得 E 落在这个邻域里的点全部被 f 映进那个圆盘。

注记

(1) z_0 **不一定在 E 中**。定义里要求的是 $0<|z-z_0|<\delta$，$z=z_0$ 本身被排除在外，所以极限只关心 z_0 *附近*的函数值，与 f 在 z_0 处有没有定义、值是多少都无关。例如 $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z-1}$ 的定义域是 $\mathbb{C}\setminus\{1\}$，1 不在其中，但当 $z\neq1$ 时 $f(z)=z+1$，故 $\lim\limits_{z\to1}f(z)=2$。

(2) 极限存在，则必**唯一**。简要理由：设 w_0,w_0' 都是极限且 $w_0\neq w_0'$，取 $\varepsilon=\frac12|w_0-w_0'|$。因为 z_0 是聚点，可以在两个去心邻域的交集里取到一点 $z\in E$，于是

$$|w_0-w_0'|\le|f(z)-w_0|+|f(z)-w_0'|<2\varepsilon=|w_0-w_0'|,$$

矛盾。（这里恰好用到了“z_0 是聚点”。）

(3) 极限满足**四则运算**：若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$，则

$$\lim_{z\to z_0}\big(f(z)\pm g(z)\big)=A\pm B,\qquad \lim_{z\to z_0}f(z)g(z)=AB,\qquad \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}\ \ (B\neq0).$$

证法与数学分析中的完全相同，只是把绝对值理解为复数的模。

与数学分析中极限的最大不同：趋近的方式

在数学分析（一元）里，$x\to x_0$ **只有两个方向**——从左边或从右边。而复平面上的 $z\to z_0$ 是**四面八方、过程任意**的：z 可以沿着任意直线、任意曲线，甚至螺旋着靠近 z_0。因此，“$\lim_{z\to z_0}f(z)$ 存在”是一个很强的要求：不论 z 用哪种方式趋近 z_0，函数值都必须趋于*同一个*数 w_0。

反过来，只要发现有两种趋近方式给出不同的结果，就可以断定极限不存在。

例：极限不存在

考察 $f(z)=\dfrac{z}{\bar z}$（$z\neq 0$）在 $z_0=0$ 处的极限。

- 沿实轴趋近：$z=x\to 0$（$x\in\mathbb{R}$），$f(z)=\dfrac{x}{x}=1$。
- 沿虚轴趋近：$z=iy\to 0$（$y\in\mathbb{R}$），$f(z)=\dfrac{iy}{-iy}=-1$。

两条路径给出不同的值，所以 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\bar z}$ 不存在。事实上，沿直线 $y=kx$（$x\to 0$）时

$$\frac{z}{\bar z}=\frac{x+ikx}{x-ikx}=\frac{1+ik}{1-ik},$$

它随斜率 k 变化，也就是随趋近的方向变化。

极限与实部、虚部的关系

设 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$，$z_0=x_0+iy_0$，$w_0=A+iB$。则

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0\quad\Longleftrightarrow\quad\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)=A,\quad\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}v(x,y)=B.$$

理由是对任一复数 $\zeta=a+ib$ 都有

$$\max\{|a|,|b|\}\ \le\ |\zeta|\ \le\ |a|+|b|,$$

把它用在 $\zeta=f(z)-w_0$ 上，再注意 $|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 恰好就是 $\mathbb{R}^2$ 中两点的距离，即得结论。

补充说明：这样，复变函数的极限问题就可以化为多元微积分里的二元函数极限问题；反过来，多元函数里“沿不同路径极限不同”的技巧，正是上一个例子在做的事情。

复变函数的连续性

连续的定义

设 $f(z)$ 在 $E\subseteq\mathbb{C}$ 上有定义，$z_0\in E$。如果

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0),$$

则称 $f(z)$ 在点 z_0 处**连续**。若 $f(z)$ 在 E 上**点点连续**，则称 $f(z)$ 是 E 上的**连续函数**（continuous function）。

补充说明：用 ε-δ 语言写出来就是

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \text{s.t. } |z-z_0|<\delta\ (z\in E)\ \Longrightarrow\ |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon.$$

与极限的定义相比，这里不必再要求 $0<|z-z_0|$，因为 $z=z_0$ 时不等式自动成立。连续本质上包含三件事：f 在 z_0 有定义、极限存在、并且两者相等。（若 z_0 是 E 的孤立点，即不是聚点，则上面的 ε-δ 条件自动满足，通常约定此时 f 在 z_0 处连续。）

连续与实部、虚部的关系

定理：设 $f(z)$ 在 $E\subseteq\mathbb{C}$ 上有定义，并把 f 写成 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$（$z=x+iy$），$z_0=x_0+iy_0\in E$，则

$$f(z)\text{ 在点 }z_0=x_0+iy_0\text{ 处连续}\quad\Longleftrightarrow\quad u(x,y)\text{ 与 }v(x,y)\text{ 都在点 }(x_0,y_0)\text{ 处连续.}$$

这里 u,v 是定义在 E 上的两个**二元实函数**：E 中的复数 $z=x+iy$ 与平面上的点 (x,y) 一一对应，所以也可以把 E 看成 $\mathbb{R}^2$ 的子集。二元函数 u 在 (x_0,y_0) 处连续的意思是

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \text{s.t. }\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\ \big((x,y)\in E\big)\ \Longrightarrow\ |u(x,y)-u(x_0,y_0)|<\varepsilon,$$

v 同理。整个定理的意思是：复变函数的连续性，就是它的实部、虚部作为二元实函数的连续性。

证明的准备：一个对应与两个不等式

一个对应。设 $z=x+iy$，$z_0=x_0+iy_0$，则

$$|z-z_0|=|(x-x_0)+i(y-y_0)|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

右边正是 $\mathbb{R}^2$ 中点 (x,y) 与 (x_0,y_0) 的距离。所以“z 落在 z_0 的 δ-邻域里”与“(x,y) 落在 (x_0,y_0) 的 δ-邻域里”是同一个条件，两边的 δ 可以直接互用。

记号。记

$$\Delta u=u(x,y)-u(x_0,y_0),\qquad \Delta v=v(x,y)-v(x_0,y_0),$$

则 $f(z)-f(z_0)=\Delta u+i\,\Delta v$，因此 $\Delta u,\Delta v$ 分别是复数 $f(z)-f(z_0)$ 的实部与虚部，且

$$|f(z)-f(z_0)|=\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}.$$

两个不等式。对任一复数 $\zeta=a+ib$（$a,b\in\mathbb{R}$），有

$$\text{(I)}\ \ |a|\le|\zeta|,\ \ |b|\le|\zeta|;\qquad \text{(II)}\ \ |\zeta|\le|a|+|b|.$$

(I) 是因为 $a^2\le a^2+b^2$，两边开平方（开方保持大小关系）得 $|a|\le\sqrt{a^2+b^2}=|\zeta|$，$b$ 同理。(II) 是因为

$$(|a|+|b|)^2=a^2+b^2+2|a||b|\ \ge\ a^2+b^2=|\zeta|^2,$$

两边开平方即得。（(II) 也就是三角不等式 $|a+ib|\le|a|+|ib|$。）

把它们用在 $\zeta=f(z)-f(z_0)$（$a=\Delta u$，$b=\Delta v$）上，得到本定理要用的关键估计：

$$\max\{|\Delta u|,|\Delta v|\}\ \le\ |f(z)-f(z_0)|\ \le\ |\Delta u|+|\Delta v|.$$

左边的不等式用于 ($\Longrightarrow$)，右边的不等式用于 ($\Longleftarrow$)。

证明

($\Longrightarrow$) 假设 $f(z)$ 在 z_0 处连续。要证 u 在 (x_0,y_0) 处连续。

任取 $\varepsilon>0$。由 f 在 z_0 处连续，存在 $\delta>0$，使得对 E 中满足 $|z-z_0|<\delta$ 的一切 z，有

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon.$$

现在取 E 中任一点 (x,y)，使 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$。这等价于 $z=x+iy$ 满足 $|z-z_0|<\delta$，所以上式成立。再由不等式 (I)，

$$|u(x,y)-u(x_0,y_0)|=|\Delta u|\ \le\ |f(z)-f(z_0)|\ <\ \varepsilon.$$

这正说明：对任意 $\varepsilon>0$，都找到了 $\delta>0$，使 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时 $|u(x,y)-u(x_0,y_0)|<\varepsilon$，即 u 在 (x_0,y_0) 处连续。

对 v 完全同理：把最后一步换成 $|v(x,y)-v(x_0,y_0)|=|\Delta v|\le|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$（同样用 (I)，而且可以用同一个 δ）。所以 v 也在 (x_0,y_0) 处连续。

($\Longleftarrow$) 假设 u,v 都在 (x_0,y_0) 处连续。要证 f 在 z_0 处连续，即对任意 $\varepsilon>0$ 找到 $\delta>0$，使 $|z-z_0|<\delta$ 时 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$。

任取 $\varepsilon>0$。因为 u 在 (x_0,y_0) 处连续，对正数 $\dfrac{\varepsilon}{2}$ 存在 $\delta_1>0$，使得

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta_1\ \Longrightarrow\ |\Delta u|<\frac{\varepsilon}{2};$$

同样因为 v 连续，存在 $\delta_2>0$，使得

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta_2\ \Longrightarrow\ |\Delta v|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

（这里特意取 $\dfrac{\varepsilon}{2}$，是为了下面把两项加起来后恰好小于 ε。）令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$。设 $z\in E$ 满足 $|z-z_0|<\delta$，则 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=|z-z_0|<\delta\le\delta_1,\delta_2$，所以 $|\Delta u|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 与 $|\Delta v|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 同时成立。由不等式 (II)，

$$|f(z)-f(z_0)|=\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\ \le\ |\Delta u|+|\Delta v|\ <\ \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这就证明了 f 在 z_0 处连续。 □

补充说明：证明的思路可以概括成一句话：$|f(z)-f(z_0)|$ 小，等价于 $|\Delta u|$ 与 $|\Delta v|$ 都小，而这三个量之间只差一个常数倍的关系——$|f(z)-f(z_0)|$ 夹在 $\max\{|\Delta u|,|\Delta v|\}$ 与 $|\Delta u|+|\Delta v|$ 之间。同样的夹逼估计，也是上一部分“极限与实部、虚部的关系”背后的理由。

例：几个基本的连续函数

- $f(z)=z$，$z\in\mathbb{C}$：$u=x$，$v=y$ 都是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数，由上面的定理，f 在 $\mathbb{C}$ 上连续。

- $f(z)=\bar{z}$，$z\in\mathbb{C}$：$u=x$，$v=-y$ 都连续，所以 f 在 $\mathbb{C}$ 上连续。
- $f(z)=\dfrac{1}{z}$，$z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$：前面已算出 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$。它们是连续函数之商，且分母 $x^2+y^2\neq 0$，所以在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处都连续，于是 f 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上连续。

下面几个例子是补充，直接用 ε-δ 说明也很容易：

- $f(z)=z$ 与 $f(z)=\bar{z}$：$|f(z)-f(z_0)|=|z-z_0|$，取 $\delta=\varepsilon$ 即可（对 $\bar{z}$ 用 $|\bar{z}-\bar{z}_0|=|\overline{z-z_0}|=|z-z_0|$）。
- $f(z)=|z|$ 在 $\mathbb{C}$ 上连续：由三角不等式，$\big||z|-|z_0|\big|\le|z-z_0|$。
- $f(z)=z^2$ 在 $\mathbb{C}$ 上连续：$|z^2-z_0^2|=|z-z_0|\,|z+z_0|$。限制 $|z-z_0|<1$，则 $|z+z_0|\le|z-z_0|+2|z_0|<1+2|z_0|$，于是取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{1+2|z_0|}\right\}$ 即得 $|z^2-z_0^2|<\varepsilon$。
- 由极限的四则运算：多项式函数在 $\mathbb{C}$ 上连续；有理函数 $P(z)/Q(z)$ 在使 $Q(z)\neq 0$ 的点处连续。

而 $f(z)=\dfrac{z}{\bar{z}}$ 无论在 $z=0$ 处补充定义成什么值，都不可能在 0 处连续，因为它在 0 处的极限根本不存在。

有界闭集上连续函数的性质

预备：一致连续

设 $f(z)$ 在 $E\subseteq\mathbb{C}$ 上有定义。如果

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \text{s.t. }\forall\,z_1,z_2\in E,\ |z_1-z_2|<\delta\ \Longrightarrow\ |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon,$$

则称 $f(z)$ 在 E 上**一致连续**。

补充说明：和“在 E 上连续”对比：连续的定义里，δ 既依赖于 ε，也依赖于所考察的点 z_0；一致连续则要求同一个 δ 对 E 中*所有*点都管用，只依赖于 ε。所以一致连续一定连续，反过来不一定。

今后常用的估计

若 $f(z)$ 在**有界闭集** E 上连续（即 E 有界，同时 E 是闭集，例如闭圆盘、圆周、闭区域），则

(1) $|f(z)|$ 有上界，即 $\exists\,M>0$，s.t. $|f(z)|\le M$ $(\forall z\in E)$；

(2) $|f(z)|$ 有最大值、最小值；

(3) $f(z)$ 在 E 上一致连续。

补充说明：这是数学分析里“闭区间上连续函数”三大性质（有界、取得最值、一致连续）在复平面上的翻版，后面做积分估计时会反复用到。注意 $f(z)$ 是复数，没有大小可比，所以谈最大最小值的是它的模 $|f(z)|$。它们的理由可以归结为 $\mathbb{R}^2$ 中已知的结论：

- $|f(z)| = \sqrt{u(x,y)^2 + v(x,y)^2}$ 是 (x,y) 的连续实值函数（也可以直接由 $\big||f(z)| - |f(z_0)|\big| \le |f(z) - f(z_0)|$ 看出）。有界闭集上的连续实函数必取得最大值与最小值，这就是 (2)；有最大值当然就有上界，得到 (1)。
- 由定理，u, v 都是有界闭集上的连续实函数，因而一致连续（Cantor 定理）。$\forall \varepsilon > 0$，取 δ 同时适用于 u, v 的一致连续性（对应的误差为 $\frac{\varepsilon}{2}$），则 $|z_1 - z_2| < \delta$ 时 $|f(z_1) - f(z_2)| \le |\Delta u| + |\Delta v| < \varepsilon$，这就是 (3)。

例：条件缺一不可

“有界”与“闭”两个条件，缺了哪一个结论都可能不成立：

- $f(z) = \dfrac{1}{z}$ 在 $E = \{\, 0 < |z| \le 1 \,\}$ 上连续，E 有界但不是闭集（少了聚点 0）。取 $z_n = \dfrac{1}{n} \in E$，$|f(z_n)| = n \to \infty$，所以 $|f|$ 在 E 上没有上界。
- $f(z) = z^2$ 在 $E = \mathbb{C}$ 上连续，E 是闭集但无界。$|f(z)| = |z|^2$ 在 $\mathbb{C}$ 上没有上界；而且它也不一致连续：取 $z_n = n$，$z_n' = n + \dfrac{1}{n}$，则 $|z_n - z_n'| = \dfrac{1}{n} \to 0$，但 $|z_n^2 - z_n'^2| = |z_n - z_n'|\,|z_n + z_n'| = \dfrac{1}{n}\left(2n + \dfrac{1}{n}\right) = 2 + \dfrac{1}{n^2} > 1$。

1.3　复变函数的导数与柯西–黎曼方程

回顾与引入

前面我们研究了复数的代数、几何、拓扑性质，以及复变函数的极限与连续。本节开始研究复变函数的“微分学”：先把数学分析里导数的定义照搬到复变函数上，再看它和实部、虚部的偏导数有什么联系。

导数的定义

可导

设 $w = f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内有定义。如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在，则称 $f(z)$ 在 z_0 处**可导**（或**可微**），这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 处的**导数**，记作 $f'(z_0)$，也记作 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}$。

补充说明（等价写法）：令 $\Delta z = z - z_0$，$\Delta w = f(z_0+\Delta z) - f(z_0)$，则

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

形式上和一元实函数的导数一模一样，但有本质区别：这里的 $\Delta z \to 0$ 是复数趋于 0，也就是前面强调过的“**四面八方、过程任意**”。要求不论 Δz 沿着什么方向、什么路径趋于 0，差商都必须趋于同一个复数。这比实变量只有“左、右”两个方向的要求强得多，也正是复变函数有许多奇妙性质的根源。

可导必连续

若 $f(z)$ 在 z_0 处可导，则 $f(z)$ 在 z_0 处连续。

证明：当 $z \neq z_0$ 时

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \cdot (z - z_0).$$

令 $z \to z_0$，右边第一个因子趋于 $f'(z_0)$，第二个因子趋于 0，由极限的四则运算，右边趋于 $f'(z_0)\cdot 0 = 0$，即 $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$。 □

补充说明：反过来不成立：下面的例子 $f(z) = \bar{z}$ 处处连续，却处处不可导。

例：多项式可导

例：$f(z) = z^2$

设 $f(z) = z^2$（$z \in \mathbb{C}$）。对任意 $z_0 \in \mathbb{C}$，当 $z \neq z_0$ 时

$$\frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = z + z_0 \longrightarrow 2z_0 \qquad (z \to z_0),$$

所以 $f(z) = z^2$ 在定义域内**点点可导**，且

$$f'(z_0) = 2z_0.$$

推广至多项式

对一般的正整数 n，用因式分解 $z^n - z_0^n = (z - z_0)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} z_0^k$，得

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} z_0^k \longrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} z_0^{n-1} = n\, z_0^{n-1},$$

即 $(z^n)' = nz^{n-1}$。再结合常数的导数为 0，以及导数对加法和数乘的线性性（见下文“四则运算”），可知任意多项式

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

在 $\mathbb{C}$ 上点点可导，且 $P'(z) = n a_n z^{n-1} + \cdots + a_1$，公式与实变量的完全一样。

例：处处不可导的函数

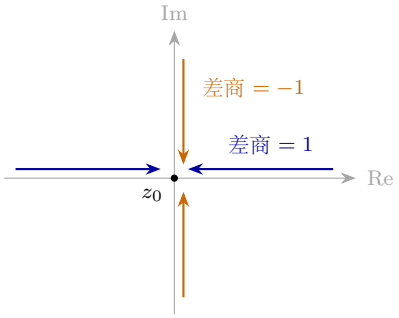
例： $f(z)=\bar{z}$

设 $f(z)=\bar{z}$（$z\in\mathbb{C}$）。任取 $z_0\in\mathbb{C}$，观察差商

$$\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z},\qquad \Delta z=z-z_0.$$

让 $\Delta z\to 0$，分别沿水平、竖直两个方向趋近：

- 水平方向：$\Delta z=\Delta x\in\mathbb{R}$，此时 $\overline{\Delta z}=\Delta x$，差商恒等于 $\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$；
- 竖直方向：$\Delta z=i\,\Delta y$（$\Delta y\in\mathbb{R}$），此时 $\overline{\Delta z}=-i\,\Delta y$，差商恒等于 $\dfrac{-i\,\Delta y}{i\,\Delta y}=-1$。



两个方向得到不同的值，所以 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ **不存在**（$\Delta z\to 0$ 时**无极限**）。

补充说明：更精确地，把 $\Delta z=re^{i\theta}$ 写成极坐标，则

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}}=e^{-2i\theta},$$

它只依赖于趋近的方向 θ，与 r 无关；$r\to 0$ 时它根本不会趋于某个定值。这个结论对每一个 z_0 都成立，于是：

结论： $f(z)=\bar{z}$ **点点不可导**！

而 $f(z)=\bar{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 上是处处连续的（前面已经验证过），所以“连续不一定可导”，而且复平面上这种现象比实数轴上严重得多：实函数 $|x|$ 只在一个点不可导，这里却是每一个点都不可导。

例： $f(z)=|z|^2=z\bar{z}$

设 $f(z)=|z|^2=z\bar{z}$。任取 $z_0\in\mathbb{C}$，当 $z\neq z_0$ 时，把分子拆成两项（减一项、加一项）：

$$\frac{z\bar{z}-z_0\bar{z}_0}{z-z_0}=\frac{z\bar{z}-z_0\bar{z}+z_0\bar{z}-z_0\bar{z}_0}{z-z_0}=\bar{z}+z_0\,\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}.$$

前一项 $\bar{z}\to\bar{z}_0$（$\bar{z}$ 是连续函数）；后一项中出现了刚刚研究过的 $\dfrac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}=\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$，它是否有极限要看系数 z_0。

- 当 $z_0=0$ 时，后一项的系数是 0，差商就是 $\bar z$，而 $|\bar z|=|z|\to 0$，所以

$$\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2-0}{z-0}=0,$$

即 $f(z)=|z|^2$ 在 0 处**可导**，$f'(0)=0$。

- 当 $z_0\neq 0$ 时，后一项 $z_0\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ 在 $\Delta z\to 0$ 时没有极限（因为 $z_0\neq 0$，$\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ 没有极限，乘上非零常数 z_0 依然没有）。如果整个差商有极限 L，那么后一项等于 $(\text{差商})-\bar z\to L-\bar z_0$，也有极限，矛盾。所以 $f(z)=|z|^2$ 在 z_0 处**不可导**。

结论：当 $z_0=0$ 时 $f(z)$ 可导；当 $z_0\neq 0$ 时 $f(z)$ 不可导。

补充说明：$|z|^2=x^2+y^2$ 作为 $\mathbb{R}^2$ 上的实函数是无穷次可微的，却在复平面上*只在一个点*可导。这说明复变函数“可导”（$\mathbb{C}$-可导）是比实函数的可微强得多的条件。

注记：求导的四则运算法则

求导满足**四则运算法则**：设 f,g 在 z_0 处可导，则 $f\pm g$、fg 在 z_0 处可导，当 $g(z_0)\neq 0$ 时 f/g 也在 z_0 处可导，并且

$$(f\pm g)'=f'\pm g',\qquad (fg)'=f'g+fg',\qquad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

此外，对于复合函数还有链式法则 $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\,f'(z_0)$。

补充说明（以乘积法则为例）：当 $z\neq z_0$ 时

$$\frac{f(z)g(z)-f(z_0)g(z_0)}{z-z_0}=f(z)\,\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}+g(z_0)\,\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

令 $z\to z_0$：由“可导必连续”，$f(z)\to f(z_0)$；两个差商分别趋于 $g'(z_0)$、$f'(z_0)$。所以右边趋于 $f(z_0)g'(z_0)+g(z_0)f'(z_0)$。其余法则的证明与数学分析完全相同，只依赖于极限的四则运算，所以公式的形式不变。

用实部、虚部判断可导：柯西–黎曼方程

问题

Question：是否可以利用实、虚部判断可导?

令 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$（即 $w=f(z)$），$z_0=x_0+iy_0$，其中 u,v 是 f 的实部、虚部。

补充说明（思路）：假设 f 在 z_0 处可导。可导意味着不论 Δz 从哪个方向趋于 0，差商的极限都相同，那就挑两个最简单的方向：水平方向（$\Delta x\to 0$，$\Delta y=0$）和竖直方向（$\Delta x=0$，$\Delta y\to 0$），分别算出差商的极限，再令两者相等。

水平方向

取 $\Delta z=\Delta x$（$\Delta x\in\mathbb{R}$，$\Delta y=0$），记

$$\Delta u=u(x_0+\Delta x,\,y_0)-u(x_0,y_0),\qquad \Delta v=v(x_0+\Delta x,\,y_0)-v(x_0,y_0),$$

则

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta u+i\,\Delta v}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\,\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

令 $\Delta x\to 0$。因为 f 可导，上式左边有极限 $f'(z_0)$；而一个复数的极限存在当且仅当它的实部、虚部的极限都存在（见前面“极限与实部、虚部的关系”），所以 $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$、$\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ 的极限都存在，也就是 u,v 关于 x 的偏导数存在，并且

$$\Longrightarrow\qquad f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+i\,v_x(x_0,y_0).$$

竖直方向

取 $\Delta z=i\,\Delta y$（$\Delta y\in\mathbb{R}$，$\Delta x=0$），此时 $\Delta u,\Delta v$ 是 y 方向的增量：$\Delta u=u(x_0,\,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)$，$\Delta v$ 同理。利用 $\dfrac{1}{i}=-i$，

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta u}{i\,\Delta y}+i\,\frac{\Delta v}{i\,\Delta y}=\frac{\Delta v}{\Delta y}-i\,\frac{\Delta u}{\Delta y}.$$

令 $\Delta y\to 0$，同理得到 u,v 关于 y 的偏导数存在，并且

$$\Longrightarrow\qquad f'(z_0)=v_y(x_0,y_0)-i\,u_y(x_0,y_0).$$

极限唯一 $\Longrightarrow$ 柯西–黎曼方程

两个方向算出的都是同一个极限 $f'(z_0)$，而极限若存在则必唯一，所以

$$u_x(x_0,y_0)+i\,v_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)-i\,u_y(x_0,y_0).$$

比较两边的实部与虚部，得到

$$\begin{cases}u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0),\\ u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0).\end{cases}$$

定义：柯西–黎曼方程

称方程组

$$u_x=v_y,\qquad u_y=-v_x$$

为 **Cauchy–Riemann 方程**（简称 **C-R 方程**）。

结论（必要条件）：若 $f=u+iv$ 在 z_0 处可导，则 u,v 在 (x_0,y_0) 处的四个一阶偏导数都存在，并且满足 C-R 方程；此时

$$f'(z_0)=u_x+i\,v_x=v_y-i\,u_y=u_x-i\,u_y=v_y+i\,v_x$$

（所有偏导数都在 (x_0,y_0) 处取值；后两个等号由 C-R 方程代换得到）。

用前面的例子检验

- $f(z)=z^2$：$u=x^2-y^2$，$v=2xy$。$u_x=2x=v_y$，$u_y=-2y=-v_x$，C-R 方程处处成立；且 $f'(z)=u_x+i\,v_x=2x+2iy=2z$，与前面直接用定义算出的结果一致。
- $f(z)=\bar{z}$：$u=x$，$v=-y$。$u_x=1$，而 $v_y=-1$，$u_x\neq v_y$，C-R 方程处处不成立，所以处处不可导，和前面的结论一致。
- $f(z)=|z|^2$：$u=x^2+y^2$，$v=0$。C-R 方程成为 $2x=0$，$2y=0$，只在原点 $(0,0)$ 处成立，所以 f 至多在原点处可导——这也与前面的结论吻合，并且比逐点用定义判断方便得多。

注：C-R 方程只是必要条件

上面的推导只用了水平、竖直两个方向，所以 C-R 方程是可导的*必要*条件，但*不是充分*条件：即使 C-R 方程成立，也不能由此断言可导。例如

$$f(z)=\sqrt{|xy|}\ \ (z=x+iy),\qquad \text{即}\ \ u(x,y)=\sqrt{|xy|},\ \ v(x,y)=0,$$

在原点处：u 在两条坐标轴上恒为 0（$u(x,0)=u(0,y)=0$），所以

$$u_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-0}{x}=0,\qquad u_y(0,0)=0,\qquad v_x(0,0)=v_y(0,0)=0,$$

从而 $u_x=v_y=0$，$u_y=-v_x=0$，C-R 方程在 $(0,0)$ 处成立。但差商

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{\sqrt{|xy|}}{x+iy}$$

沿实轴（$y=0$）和虚轴（$x=0$）都恒为 0，而沿对角线 $y=x>0$ 时，$\sqrt{|xy|}=x$，差商等于 $\dfrac{x}{x(1+i)}=\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1-i}{2}\neq 0$。不同方向的极限不一样，所以 f 在原点不可导，尽管 C-R 方程在原点成立。

补充说明：要把 C-R 方程变成充分条件，还需要加上对 u,v 本身的“光滑性”要求。一个常用的结论是：若 u,v 在 (x_0,y_0) 处（实）可微，并且满足 C-R 方程，则 $f=u+iv$ 在 z_0 处可导。这就回答了本小节开头的问题：可以利用实、虚部判断可导，但需要“C-R 方程 $+\,u,v$ 的可微性”两个条件，仅有 C-R 方程不够。（证明见下一小节。）

可导的充要条件

上一小节说明了：可导 $\Longrightarrow$ C-R 方程成立，但反过来不行。本小节给出完整的充要条件，并证明它。

预备一：$o(\Delta z)$ 记号与可导的等价刻画

记 $\Delta z = z - z_0$，$\Delta f = f(z_0+\Delta z) - f(z_0)$。称一个依赖于 Δz 的复数量 $r(\Delta z)$ 是 $o(\Delta z)$（$\Delta z \to 0$ 时），如果

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{r(\Delta z)}{\Delta z} = 0,$$

也就是 $\dfrac{|r(\Delta z)|}{|\Delta z|} \to 0$。直观地说，它是比 Δz 更高阶的小量。

命题：f 在 z_0 处可导 $\iff$ 存在 $A \in \mathbb{C}$，使得

$$\Delta f = A\,\Delta z + o(\Delta z),$$

并且此时 $A = f'(z_0)$。

证明：($\Longrightarrow$) 若 f 可导，令 $r(\Delta z) = \Delta f - f'(z_0)\Delta z$，则

$$\frac{r(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0) \longrightarrow 0,$$

即 $\Delta f = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)$。($\Longleftarrow$) 若 $\Delta f = A\Delta z + o(\Delta z)$，两边除以 Δz 得 $\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = A + \dfrac{o(\Delta z)}{\Delta z} \to A$，所以 f 可导且 $f'(z_0) = A$。 □

补充说明：这说明复变函数的“可导”和“可微”是一回事（这是一元函数的特点；实多元函数里这两个概念不同）。$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)$ 的意思是：在 z_0 附近，f 的增量近似于“乘以一个复数 $f'(z_0)$”。

预备二：二元实函数的可微（数学分析 III）

设二元实函数 $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近有定义，记 $\Delta u = u(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0)$，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$。若存在实数 A, B，使得

$$\Delta u = A\,\Delta x + B\,\Delta y + o(\rho) \qquad (\rho \to 0),$$

则称 u 在 (x_0,y_0) 处**可微**。此时必有 $A = u_x(x_0,y_0)$，$B = u_y(x_0,y_0)$（分别取 $\Delta y = 0$、$\Delta x = 0$ 即得）。

回顾几个事实：偏导数在一点连续 $\Longrightarrow$ 可微 $\Longrightarrow$ 连续，且各偏导数存在；但反过来都不成立。特别地，“偏导数存在”远弱于“可微”。

预备三：$o(\Delta z)$ 与实部、虚部

设复数量 $r = r_1 + ir_2$（r_1, r_2 为实数），注意 $|\Delta z| = \rho$。由前面的不等式 $\max\{|r_1|,|r_2|\} \le |r| \le |r_1| + |r_2|$，两边除以 ρ 得

$$r = o(\Delta z) \quad \Longleftrightarrow \quad r_1 = o(\rho) \text{ 且 } r_2 = o(\rho).$$

即：复数的“高阶小量”，等价于它的实部、虚部都是高阶小量。

定理

定理：设 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在区域 D 内有定义，$z_0=x_0+iy_0\in D$。则 $f(z)$ 在 z_0 处可导的充要条件是：

(1) $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微（数学分析 III）；

(2) u_x, u_y, v_x, v_y 在 (x_0,y_0) 处满足 C-R 方程。

证明

($\Longrightarrow$) 由条件（f 在 z_0 处可导），由预备一，

$$\Delta f(z)=f'(z_0)\,\Delta z+o(\Delta z),\qquad \text{这里}\ \left|\frac{o(\Delta z)}{\Delta z}\right|\to 0.$$

令 $f'(z_0)=\alpha+i\beta\,(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$，并把 $o(\Delta z)$ 记作 r。因为 $\Delta f=\Delta u+i\,\Delta v$，$\Delta z=\Delta x+i\,\Delta y$，所以

$$\Delta u+i\,\Delta v=(\alpha+i\beta)(\Delta x+i\Delta y)+r=\big(\alpha\Delta x-\beta\Delta y\big)+i\big(\alpha\Delta y+\beta\Delta x\big)+\mathrm{Re}(r)+i\,\mathrm{Im}(r).$$

分别比较两边的实部与虚部，得

$$\Delta u=\alpha\,\Delta x-\beta\,\Delta y+\mathrm{Re}\big(o(\Delta z)\big),\qquad \Delta v=\alpha\,\Delta y+\beta\,\Delta x+\mathrm{Im}\big(o(\Delta z)\big).$$

由预备三，

$$\frac{\mathrm{Re}\big(o(\Delta z)\big)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\to 0,\qquad \frac{\mathrm{Im}\big(o(\Delta z)\big)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\to 0,$$

即 $\mathrm{Re}(o(\Delta z))$、$\mathrm{Im}(o(\Delta z))$ 都是 $o(\rho)$。所以：

- $\Delta u=\alpha\,\Delta x+(-\beta)\Delta y+o(\rho)$，$\Delta v=\beta\,\Delta x+\alpha\,\Delta y+o(\rho)$，由定义，$u,v$ 在 (x_0,y_0) 处**可微**，这就是 (1)；
- 并且读出各偏导数：$u_x=\alpha$，$u_y=-\beta$，$v_x=\beta$，$v_y=\alpha$，于是 $u_x=v_y$，$u_y=-v_x$，即 C-R 方程成立，这就是 (2)。

($\Longleftarrow$) 由 (1)、(2) 可知：记 $A=u_x(x_0,y_0)$，$B=u_y(x_0,y_0)$（这里的 A,B 与上面的 α,β 无关，黑板上这两处都用了 α,β）。由 (1)，u 可微，

$$\Delta u=A\,\Delta x+B\,\Delta y+\eta_1,\qquad \eta_1=o(\rho);$$

v 也可微，$\Delta v=v_x\Delta x+v_y\Delta y+\eta_2$，$\eta_2=o(\rho)$。结合 (2) 中的 C-R 方程 $v_y=u_x=A$，$v_x=-u_y=-B$，得

$$\Delta v=-B\,\Delta x+A\,\Delta y+\eta_2.$$

于是

$$\Delta f=\Delta u+i\,\Delta v=\big(A\Delta x+B\Delta y\big)+i\big(-B\Delta x+A\Delta y\big)+(\eta_1+i\eta_2).$$

注意 $(A-iB)(\Delta x+i\Delta y)=A\Delta x+B\Delta y+i(-B\Delta x+A\Delta y)$，所以

$$\Delta f=(A-iB)\,\Delta z+(\eta_1+i\,\eta_2).$$

由预备三，$\eta_1+i\eta_2=o(\Delta z)$。再由预备一，$f$ 在 z_0 处可导，并且

$$f'(z_0)=A-iB=u_x(x_0,y_0)-i\,u_y(x_0,y_0),$$

与前面算出的导数公式一致。 □

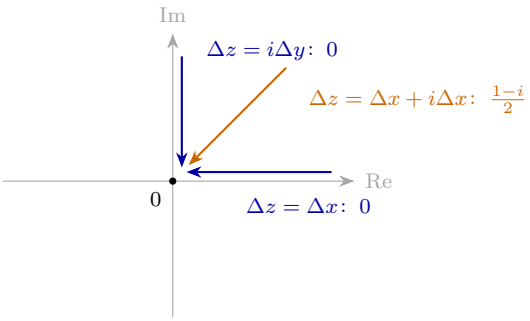
注记

(1) 几何意义。可微的意思是：在 (x_0,y_0) 附近，从 $(\Delta x,\Delta y)$ 到 $(\Delta u,\Delta v)$ 的映射可以用一个实线性映射来近似，其矩阵是

$$\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}.$$

C-R 方程恰好说这个矩阵形如 $\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$，而这样的矩阵作用在 $(\Delta x,\Delta y)^{\mathrm T}$ 上，正是复数乘法 $(\alpha+i\beta)(\Delta x+i\Delta y)$（见证明中的展开）。所以定理的意思就是：*可导 = 在实意义下可微，并且这个线性近似恰好是“乘以一个复数”。*

(2) 两个条件缺一不可，C-R 方程（必要非充分）不能代替可微性。水平、竖直两个方向只能看到 C-R 方程；而可导要求所有方向的差商极限都相同，条件 (1) 起的作用正是把其余方向也控制住。反例就是上一小节的 $f(z)=\sqrt{|xy|}$：



沿水平、竖直方向差商都等于 0，所以 $u_x=u_y=v_x=v_y=0$，C-R 方程成立；但令 $\Delta z=\Delta x+i\,\Delta x$（沿对角线，$\Delta x>0$）时，$\sqrt{|xy|}=\Delta x$，差商等于 $\dfrac{1-i}{2}\neq 0$，所以不可导。按定理，这说明该函数在原点处不满足条件 (1)。事实上可以直接验证 $u=\sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 处不可微：若可微，由 $u_x=u_y=0$ 应有 $u(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$，但在 $y=x>0$ 上 $u=x=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}$，比值是常数 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，不趋于 0。所以 u 虽然在原点处偏导数存在，*却不可微。*

推论

推论：假设同上（$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在区域 D 内有定义，$z_0=x_0+iy_0\in D$）。若以下两个条件满足：

(1) $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内存在连续的一阶偏导数；

(2) u_x, u_y, v_x, v_y 满足 C-R 方程（在 (x_0,y_0) 处）；

则 $f(z)$ 在点 z_0 处可导。

证明：由数学分析 III 的结论，若二元函数的偏导数在某点的邻域内存在，并且在该点连续，则函数在该点可微。因此由本推论的 (1)，u,v 在 (x_0,y_0) 处可微，即上面定理的条件 (1) 成立；本推论的 (2) 就是定理的条件 (2)。由定理，f 在 z_0 处可导。　□

补充说明：与定理相比，推论把“可微”这个较难直接验证的条件，换成了“偏导数连续”这个只需要求偏导数、看连续性的条件，所以是判断可导最常用的办法。特别地，若 u,v 在区域 D 内的四个一阶偏导数都连续，并且在 D 内处处满足 C-R 方程，则 f 在 D 内处处可导。

例：$f(z)=z^2$，$u=x^2-y^2$，$v=2xy$，偏导数都是多项式（连续），C-R 方程处处成立，所以 z^2 在 $\mathbb{C}$ 上处处可导，$f'(z)=u_x-i\,u_y=2x+2iy=2z$。又如 $f(z)=|z|^2$：$u=x^2+y^2$，$v=0$ 的偏导数处处连续，故条件 (1) 处处成立；C-R 方程只在原点成立，所以只在原点可导，$f'(0)=u_x-iu_y\big|_{(0,0)}=0$，与前面直接用定义算出的结果一致。

解析函数

定义

设 $f(z)$ 在点 z_0 的某邻域 E 内有定义。若存在一个更小的邻域 $D\subseteq E$（D 仍是 z_0 的邻域，例如取以 z_0 为圆心的更小的开圆盘），使得 $f(z)$ 在 D 中**点点可导**，则称 $f(z)$ 在点 z_0 处**解析**。

补充说明：注意区别：“在 z_0 处可导”只是对 z_0 这一个点的要求；“在 z_0 处解析”则要求 f 在 z_0 的整个邻域里处处可导，是一个“局部”的性质。如果 f 在点集 S 的每一点处都解析，就称 f 在 S 上解析；在区域内解析的函数称为**解析函数**（也叫全纯函数）。如果 f 在 z_0 处不解析，z_0 常被称为 f 的奇点。

注记

(1) 对于一个定点 z_0：

$$f\text{ 在 }z_0\text{ 处解析}\implies f\text{ 在 }z_0\text{ 处可导},\qquad\text{反过来不成立。}$$

正推是显然的：解析要求 z_0 的邻域里点点可导，z_0 本身就在这个邻域里。反过来的反例就是 $f(z)=|z|^2$：前面算过它在 $z=0$ 处可导（$f'(0)=0$），但在 0 的任何邻域内，除

了 0 以外的每一点都不可导，所以 $f(z)=|z|^2$ 在 0 处不解析。事实上 $|z|^2$ 在 $\mathbb{C}$ 的每一点都不解析：它的可导点集只有 $\{0\}$，没有任何点的邻域整个落在可导点集中。

(2) 对于区域：

$$\text{点点解析} \iff \text{点点可导}.$$

区域是开集，所以若 f 在区域 D 内点点可导，则对任一 $z_0\in D$，存在以 z_0 为圆心的开圆盘包含于 D，f 在这个圆盘里点点可导，即 f 在 z_0 处解析；反过来，点点解析当然点点可导。所以“在区域 D 内解析”与“在 D 内处处可导”是同一件事。（只有对单个点，解析与可导才有区别。）

例

- 多项式在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上解析（在全平面解析的函数称为**整函数**）；有理函数 $P(z)/Q(z)$ 在使 $Q(z)\neq 0$ 的点处解析，例如 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上解析，$z=0$ 是它的奇点。
- $f(z)=\bar z$ 处处不可导，所以处处不解析；$f(z)=|z|^2$ 只在 $z=0$ 处可导，但处处不解析。
- 由求导的四则运算法则，若 f,g 在同一个区域 D 内解析，则 $f\pm g$、fg 在 D 内解析，f/g 在 D 内使 $g\neq 0$ 的点处解析。
- 由前面的推论：若 u,v 在区域 D 内有连续的一阶偏导数并满足 C-R 方程，则 $f=u+iv$ 在 D 内解析。

例： $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$

设 $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$（$z=x+iy$）。则

$$u(x,y)=e^x\cos y,\qquad v(x,y)=e^x\sin y,$$

四个一阶偏导数为

$$u_x=e^x\cos y,\quad u_y=-e^x\sin y,\qquad v_x=e^x\sin y,\quad v_y=e^x\cos y.$$

它们在整个 $\mathbb{R}^2$ 上连续，并且 $u_x=v_y$，$u_y=-v_x$ 处处成立。由前面的**判别法**（推论），

$$f(z)\text{ 在 }\mathbb{C}\text{ 上处处可导，并且处处解析。}$$

（$\mathbb{C}$ 是区域，点点可导即点点解析。）导数为

$$f'(z)=u_x+i\,v_x=e^x\cos y+i\,e^x\sin y=f(z).$$

补充说明：这个函数就是后面要学习的**指数函数** e^z：由 Euler 公式 $e^{iy}=\cos y+i\sin y$，$e^x(\cos y+i\sin y)=e^xe^{iy}=e^{x+iy}=e^z$。上面的计算说明 $(e^z)'=e^z$，与实变量的情形一模一样。

整函数

定义：在复平面上处处解析的函数称为**整函数**（entire function）。

例：多项式函数是整函数（前面已经说明多项式在 $\mathbb{C}$ 上点点可导，因此处处解析）。上面的 e^z 也是整函数。

补充说明：整函数的范围比多项式大：e^z 不是多项式。而 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在 $z=0$ 处没有定义，不是整函数。

例：导数恒为零的解析函数是常值函数

设 $f(z)$ 是定义在区域 D 上的解析函数，且 $f'(z)=0$（$\forall z\in D$）。问：$f(z)$ 是不是常值函数?

答：是。这里要用到数学分析 III 的结论。

证明：记 $f=u+iv$。解析函数在 D 内点点可导，所以由前面的结果

$$f'(z)=u_x+i\,v_x=v_y-i\,u_y,\qquad u_x=v_y,\quad u_y=-v_x.$$

由 $f'(z)=0$，实部与虚部都为 0，得 $u_x=v_x=0$，并且 $v_y=u_y=0$。于是在 D 内

$$u_x=u_y=v_x=v_y=0.$$

四个偏导数都恒为零（当然连续），所以 u,v 在 D 内可微。现在任取 D 内两点 z_1,z_2。因为 D 是区域（连通的开集），存在完全落在 D 内的折线连接 z_1 与 z_2。取折线上的一条线段 $[p,q]\subset D$，令 $g(t)=u\big(p+t(q-p)\big)$，$t\in[0,1]$，由链式法则

$$g'(t)=u_x\cdot\Delta x+u_y\cdot\Delta y=0\qquad(\Delta x+i\Delta y=q-p),$$

所以一元函数 g 是常数，即 $u(p)=u(q)$。沿折线逐段下去，得 $u(z_1)=u(z_2)$。同理 $v(z_1)=v(z_2)$。因此 $f(z_1)=f(z_2)$，f 是常值函数。 □

补充说明：“连通”这个条件不可少。例如 $D=\{|z|<1\}\cup\{|z-3|<1\}$ 不连通，f 在第一个圆盘里取 0、在第二个圆盘里取 1，$f'\equiv0$，但 f 不是常值函数。这也是为什么区域的定义要求“连通”。

用 z 与 $\bar z$ 来代替 x 与 y

回顾

由

$$\begin{cases} z=x+iy,\\ \bar z=x-iy \end{cases}\quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x=\dfrac{z+\bar z}{2},\\ y=\dfrac{z-\bar z}{2i}. \end{cases}$$

可以用 $z,\bar z$ 来代替 x,y 作为“自变量”。形式上，微分也有

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\big(\mathrm{d}z+\mathrm{d}\bar z\big),\qquad \mathrm{d}y=\frac{1}{2i}\big(\mathrm{d}z-\mathrm{d}\bar z\big).$$

补充说明：这里的“形式上”，指的是把 z 与 $\bar z$ 当作可以相互独立地变化的两个变量来做代换和运算。因为 (x,y) 与 $(z,\bar z)$ 只是同一个平面上两套可以相互转换的坐标，这样做在计算上是合理的。

全微分的复形式

设 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 作为 (x,y) 的函数可微，则

$$\mathrm{d}f(z)=\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

把上面的 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 代入，合并 $\mathrm{d}z$ 与 $\mathrm{d}\bar z$ 的系数（利用 $\frac{1}{i}=-i$）：

$$\mathrm{d}f(z)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}-i\,\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\mathrm{d}z+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}+i\,\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\mathrm{d}\bar z.$$

形式偏导数 $\partial/\partial z$ 与 $\partial/\partial\bar z$

形式上记

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}-i\,\frac{\partial}{\partial y}\Big),\qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}+i\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)}$$

则全微分可以简洁地写成

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial \bar z}\,\mathrm{d}\bar z.$$

补充说明：这两个算子正是把 f 看成 $z,\bar z$ 的函数后，按链式法则对 z、$\bar z$ 求偏导：由 $x=\frac{z+\bar z}{2}$，$y=\frac{z-\bar z}{2i}$ 有 $\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{2}$，$\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2i}$，$\frac{\partial x}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}$，$\frac{\partial y}{\partial \bar z}=-\frac{1}{2i}$，所以

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{1}{2i}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\Big),$$

$\frac{\partial f}{\partial \bar z}$ 同理。

C-R 方程的复形式

结论（Poincaré，1899）：

$$\text{C-R 方程}\quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial \bar z}=0.$$

证明：把 $f=u+iv$ 代入，

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}+i\,\frac{\partial f}{\partial y}\Big)=\frac{1}{2}\big[(u_x+i\,v_x)+i\,(u_y+i\,v_y)\big]=\frac{1}{2}\big[(u_x-v_y)+i\,(v_x+u_y)\big].$$

实部 $u_x - v_y$ 与虚部 $v_x + u_y$ 同时为 0，恰好就是 $u_x = v_y$，$u_y = -v_x$。 □

补充说明：$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 的意思是：f 的表达式里“不含 $\bar{z}$”，只依赖于 z。此外，若 f 满足 C-R 方程，则

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\big[(u_x + i\,v_x) - i(u_y + i\,v_y)\big] = \frac{1}{2}\big[(u_x + v_y) + i(v_x - u_y)\big] = u_x + i\,v_x = f'(z),$$

于是 $\mathrm{d}f = f'(z)\,\mathrm{d}z$，与一元函数中 $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ 的写法完全一致。

例

- $f(z) = z$：$\dfrac{\partial z}{\partial z} = 1$，$\dfrac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0$，满足 C-R 方程，$f'(z) = 1$。$f(z) = z^2$：$\dfrac{\partial z^2}{\partial \bar{z}} = 0$，$\dfrac{\partial z^2}{\partial z} = 2z = f'(z)$。
- $f(z) = \bar{z}$：$\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0$，所以不满足 C-R 方程，处处不可导。
- $f(z) = |z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$：$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}(2x + i \cdot 2y) = z$，只在 $z = 0$ 处为零，与前面的结论一致：$|z|^2$ 只在原点处可导。
- $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$：直接计算得 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$，并且 $\dfrac{\partial f}{\partial z} = f$。

补充说明：如果 u, v 在区域 D 内有连续的一阶偏导数，并且 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$，那么由前面的推论，$f$ 在 D 内解析。

1.4　初等解析函数

回顾与引入

前面我们已经知道了什么是解析函数，也见过两类最简单的例子：多项式（整函数）以及 $e^x(\cos y + i \sin y)$。这一节把一元微积分里最常用的**初等函数**——指数函数、正弦函数、余弦函数——推广到复变量，并研究它们保留了哪些熟悉的性质，又出现了哪些新的现象。

推广的原则是：**限制到实轴上时，必须和原来的实函数一致**；同时希望它在整个复平面上是解析的。

指数函数

定义

对 $z = x + iy$，定义

$$\boxed{e^z := e^{x+iy} = e^x\,(\cos y + i \sin y)}$$

称之为**复指数函数**。

补充说明：这个定义有两层含义。其一，e^x 是我们熟悉的实指数函数，它给出 e^z 的模；其二，$\cos y + i\sin y$ 是单位圆上辐角为 y 的点，它给出 e^z 的**方向**。也就是说 e^z 的极坐标形式就是

$$e^z = e^x \cdot \big(\cos y + i\sin y\big), \qquad |e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y \ (\mathrm{mod}\, 2\pi).$$

性质 1)　与实指数函数一致

$$e^{x+0i} = e^x.$$

证明：取 $y = 0$，$e^{x+0i} = e^x(\cos 0 + i\sin 0) = e^x$。 □

补充说明：这正说明复指数函数是实指数函数的**推广**：限制在实轴上，两者相同。

性质 2)　Euler 公式

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

证明：取 $x = 0$，$e^{0+iy} = e^0(\cos y + i\sin y) = \cos y + i\sin y$。 □

性质 3)　模

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}.$$

证明：$|e^z| = |e^x| \cdot |\cos y + i\sin y| = e^x\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x$。 □

补充说明：由此 $|e^z| = e^x > 0$，所以 e^z **永远不等于** 0。

性质 4)　导数

$$(e^z)' = e^z, \qquad e^z \text{ 是整函数.}$$

证明：记 $u = e^x\cos y$，$v = e^x\sin y$，则

$$u_x = e^x\cos y, \quad v_y = e^x\cos y, \qquad u_y = -e^x\sin y, \quad v_x = e^x\sin y.$$

所以 $u_x = v_y$，$u_y = -v_x$，C-R 方程在整个复平面成立；又四个偏导数处处连续，由前面的推论 e^z 在 $\mathbb{C}$ 上处处可导，并且

$$(e^z)' = u_x + i\,v_x = e^x\cos y + i\,e^x\sin y = e^z. \square$$

补充说明：这与上一节例子里的计算是同一个：$(e^z)' = e^z$ 与实变量的形式完全一样。

性质 5)　加法定理

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}.$$

证明：设 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$，则

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}e^{x_2}\,(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2).$$

展开括号并用三角函数的和角公式：

$$\begin{aligned}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2) &= (\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1\sin y_2) + i(\sin y_1\cos y_2 + \cos y_1\sin y_2)\\ &= \cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2).\end{aligned}$$

再注意 $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$，所以

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2}\big(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\big) = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}.\square$$

补充说明：这条性质的“套路”就是：指数部分相乘等于指数相加，角度部分（复数乘法时辐角相加）也恰好相加。这也是复数乘法的几何意义（模相乘、辐角相加）的另一种写法。

性质 6)　周期性（新现象）

e^z 是**周期函数**，$2k\pi i$ $(k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0)$ 是它的周期，即

$$e^{z+2k\pi i} = e^z.$$

证明：由性质 5)，

$$e^{z+2k\pi i} = e^z\cdot e^{2k\pi i} = e^z\,(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi) = e^z.\square$$

补充说明：这是复指数函数和实指数函数的本质区别：实指数函数 e^x 严格单调递增，不可能是周期函数；而 e^z 沿虚轴方向每隔 2π 就重复一次。这个周期性的根源是 $e^{iy} = \cos y + i\sin y$ 绕着单位圆转圈。

反过来，如果 $e^T = 1$，那么 $|e^T| = e^{\operatorname{Re}T} = 1$ 推出 $\operatorname{Re}T = 0$，再由 $\cos(\operatorname{Im}T) = 1$ 推出 $\operatorname{Im}T = 2k\pi$。所以 e^z 的全部周期就是 $2k\pi i$。

性质 7)　$\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 不存在

证明：让 z 沿着实轴趋于 ∞：当 $z = x\to+\infty$ 时 $e^x\to+\infty$（即 $|e^z|\to\infty$）；当 $z = x\to-\infty$ 时 $e^x\to 0$。两条路径上的极限不同，所以 $z\to\infty$ 时 e^z 没有极限。　$\square$

补充说明：注意这里还不能说成“极限为 ∞”：沿着负实轴，$e^z\to 0$。再看沿虚轴 $z = iy$ 的路径，$|e^{iy}| = 1$ 始终在单位圆上打转，这是第三种行为。这再次体现了复变量的极限必须与趋近方式无关。

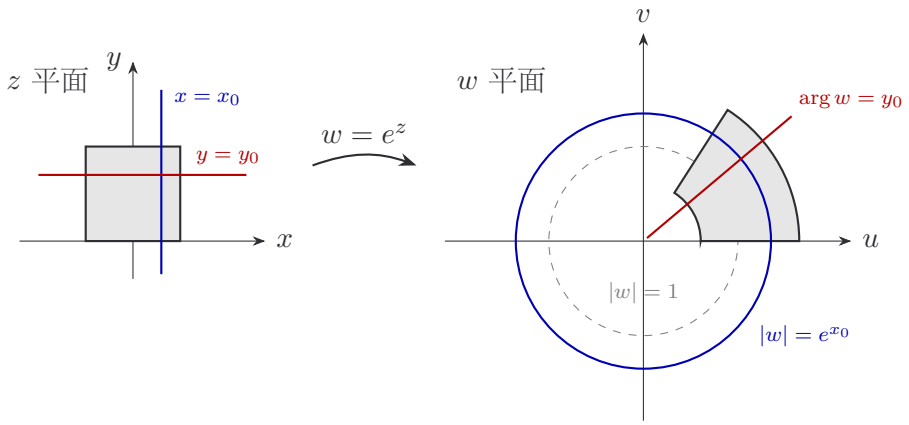
图像：$w = e^z$ 把什么变成什么

复变函数没法像实函数那样画一条图像曲线（输入、输出各占一个平面，总共需要四维）。所以我们分别画出 z 平面和 w 平面，看看 z 平面里的图形被 $w = e^z$ 送到了哪里。

由 $|w| = e^x$，$\arg w = y$，有：

- z 平面上x **固定**的竖直线 $x = x_0$：模长 $|w| = e^{x_0}$ 不变，辐角 y 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化，所以像是*以原点为圆心、半径 e^{x_0} 的圆*（y 每增加 2π 绕一圈；这就是周期性）；
- z 平面上y **固定**的水平线 $y = y_0$：辐角 $\arg w = y_0$ 不变，模长 e^x 从 0 到 $+\infty$ 变化，所以像是*从原点出发的射线* $\arg w = y_0$（不含原点）。

下图取矩形 $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$，$0 \le y \le 1$：它被 e^z 送到一个“圆环的一小块”（模长在 $e^{-1/2}$ 与 $e^{1/2}$ 之间，辐角在 0 与 1 弧度之间），这块区域跨过单位圆（因为 $x = 0$ 在矩形里，对应 $|w| = 1$）。



补充说明：把整条水平带形区域 $\{0 \le y < 2\pi\}$ 看成一个整体：对任意 $w \neq 0$，令 $x = \ln|w|$，$y = \arg w$，就有 $e^{x+iy} = w$。所以 e^z 把这条带形区域*一一地映满*“去掉原点的整个 w 平面”；整个 z 平面则一圈一圈、反复地覆盖 w 平面（每层相差 $2\pi i$）。

例：Euler 恒等式与一个小故事

例：Euler 恒等式

在性质 2) 中取 $y = \pi$：

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

证明：$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$。 □

补充说明：这个等式把数学中最重要的五个常数 e，i，π，1，0 放进了一个公式。

Story：Lindemann（1882）

先回顾两个概念：如果一个数是某个整系数非零多项式的根，就称它为**代数数**（如 $\sqrt{2}$、i、$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 都是代数数）；不是代数数的数称为**超越数**。

Lindemann 定理（1882）：若 $\alpha \neq 0$ 是代数数，则 e^{α} 是超越数。

补充说明（这个定理和 Euler 恒等式有什么关系）：假设 π 是代数数。因为 i 也是代数数，两个代数数的乘积还是代数数，所以 $i\pi$ 是（非零的）代数数。于是由 Lindemann 定理，$e^{i\pi}$ 是超越数。但是 Euler 恒等式告诉我们 $e^{i\pi} = -1$ 是一个代数数（它是多项式 $x+1$ 的根），矛盾！所以 π **是超越数**。

补充说明：这是 Lindemann 在 1882 年证明 π 是超越数的方式。由此得到了著名的几何结论：古希腊的**化圆为方**问题（用直尺和圆规作出与已知圆面积相等的正方形）是不可能的。再取 $\alpha = 1$ 又得到 e 是超越数（Hermite，1873）。

三角函数

定义

$$\boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}$$

分别称为**复正弦函数**与**复余弦函数**。

补充说明：这个定义从哪里来？在实数情形，由 Euler 公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ 与 $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ 相加减，就得到

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

复数情形直接*用这两个式子作为定义*（因为右边对任意复数 z 都有意义）。作为推论，Euler 公式对一切复数 z 都成立：

$$\cos z + i\sin z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = e^{iz}.$$

双曲函数及其与三角函数的关系

和三角函数的定义类似，用 e^{z} 与 e^{-z}（而不是 e^{iz} 与 e^{-iz}）来组合，就得到**双曲函数**：

$$\boxed{\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \qquad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}}$$

分别称为**双曲正弦**、**双曲余弦**、**双曲正切**函数。取 $z = x$ 为实数，就是微积分里学过的实双曲函数，所以这也是实双曲函数的推广。

补充说明：$\sinh z$，$\cosh z$ 是整函数（指数函数的线性组合），并且

$$(\sinh z)' = \cosh z, \qquad (\cosh z)' = \sinh z, \qquad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,$$

它们都以 $2\pi i$ 为周期（因为 e^z 以 $2\pi i$ 为周期），$\sinh z$ 是奇函数，$\cosh z$ 是偶函数。

双曲函数与三角函数的关系：对任意复数 z，

$$\boxed{\sin(iz)=i\sinh z,\qquad \cos(iz)=\cosh z,\qquad \sinh(iz)=i\sin z,\qquad \cosh(iz)=\cos z}$$

证明：代入定义，注意 $\dfrac{1}{i}=-i$：

$$\sin(iz)=\frac{e^{i\cdot iz}-e^{-i\cdot iz}}{2i}=\frac{e^{-z}-e^{z}}{2i}=i\,\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}=i\sinh z,\qquad \cos(iz)=\frac{e^{-z}+e^{z}}{2}=\cosh z.$$

类似地，$\sinh(iz)=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=i\cdot\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=i\sin z$，$\cosh(iz)=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z$。□

补充说明：换句话说，在复数范围内，三角函数与双曲函数其实是同一族函数，只差一个“旋转 90°”（把自变量乘以 i）。这也解释了为什么两者的公式如此相似：例如把 $\cos^2 z+\sin^2 z=1$ 中的 z 换成 iz，由 $\cos(iz)=\cosh z$，$\sin(iz)=i\sinh z$ 得 $\cosh^2 z+(i\sinh z)^2=1$，也就是 $\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$。

一般点 $z=x+iy$ 处的值：由和角公式 $\sin(x+iy)=\sin x\cos(iy)+\cos x\sin(iy)$ 以及上面的关系，

$$\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y,\qquad \cos(x+iy)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y.$$

由此（用 $\cosh^2 y=1+\sinh^2 y$）可以算出模：

$$|\sin z|^2=\sin^2 x+\sinh^2 y,\qquad |\cos z|^2=\cos^2 x+\sinh^2 y.$$

补充说明：这两个公式一下子说明了很多事情：当 $|y|\to\infty$ 时 $\sinh^2 y\to\infty$，所以 $\sin z,\cos z$ 无界；$\sin z=0$ 当且仅当 $\sin x=0$ 且 $\sinh y=0$，即 $z=k\pi$ 为实数（$\cos z$ 的零点同理）。后面的性质 6) 与各个例题可以用它来核对。

性质 1)　与实三角函数一致

$$\sin(x+0i)=\sin x,\qquad \cos(x+0i)=\cos x.$$

证明：以正弦为例，$\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ 就是上面已经说过的实数情形的 Euler 公式。余弦同理。□

补充说明：与指数函数的情形一样，复三角函数是实三角函数的推广。

性质 2)　$\sin z$，$\cos z$ 是整函数

$$(\sin z)'=\cos z,\qquad (\cos z)'=-\sin z.$$

证明：e^{iz} 与 e^{-iz} 都是整函数（e^z 的复合），所以它们的线性组合 $\sin z, \cos z$ 也是整函数。由链式法则 $(e^{iz})' = ie^{iz}$，$(e^{-iz})' = -ie^{-iz}$，所以

$$(\sin z)' = \frac{1}{2i}\big(ie^{iz} - (-i)e^{-iz}\big) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z,$$
$$(\cos z)' = \frac{1}{2}\big(ie^{iz} + (-i)e^{-iz}\big) = \frac{i}{2}\big(e^{iz}-e^{-iz}\big) = -\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -\sin z.\square$$

补充说明：这里用到的链式法则 $(f(g(z)))' = f'(g(z))g'(z)$ 与实变量完全相同（证明也完全相同，这里不再重复）。最后一步用到了 $\dfrac{i}{2} = -\dfrac{1}{2i}$。

性质 3)　奇偶性

$\sin z$ 是奇函数，$\cos z$ 是偶函数：

$$\sin(-z) = -\sin z, \qquad \cos(-z) = \cos z.$$

证明：把 z 换成 $-z$，e^{iz} 与 e^{-iz} 互换位置：$\sin(-z) = \dfrac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i} = -\sin z$；$\cos(-z) = \dfrac{e^{-iz}+e^{iz}}{2} = \cos z$。 $\square$

性质 4)　周期性

$\sin z$ 与 $\cos z$ 都是周期函数，$2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0)$ 是它们的周期。

证明：由指数函数的周期性，$e^{i(z+2k\pi)} = e^{iz}e^{2k\pi i} = e^{iz}$，同理 $e^{-i(z+2k\pi)} = e^{-iz}$。代入定义式即得 $\sin(z+2k\pi) = \sin z$，$\cos(z+2k\pi) = \cos z$。 $\square$

性质 5)　三角恒等式均成立

实数范围内成立的三角恒等式，对复数仍然成立，例如

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \qquad \sin(z_1+z_2) = \sin z_1\cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \qquad \sin 2z = 2\sin z\cos z.$$

证明（以前两个为例）：代入定义，

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \frac{-(e^{2iz}-2+e^{-2iz})}{4} + \frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

对于和角公式，把 $\sin z_1\cos z_2 + \cos z_1\sin z_2$ 的四个指数函数写出来：

$$\frac{(e^{iz_1}-e^{-iz_1})(e^{iz_2}+e^{-iz_2})}{4i} + \frac{(e^{iz_1}+e^{-iz_1})(e^{iz_2}-e^{-iz_2})}{4i}$$
$$= \frac{2e^{iz_1}e^{iz_2} - 2e^{-iz_1}e^{-iz_2}}{4i} = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin(z_1+z_2),$$

这里用了 $e^{iz_1}e^{iz_2} = e^{i(z_1+z_2)}$（性质 5）加法定理）。其他恒等式的证明类似。 $\square$

性质 6)　$|\sin z| \le 1$、$|\cos z| \le 1$ 不再成立（新现象）

补充说明：在实数范围内 $|\sin x| \le 1$、$|\cos x| \le 1$，但对复数这两个不等式**不成立**。事实上取 $z = iy$（y 为实数），由定义（这正是上面 $\sin(iz) = i\sinh z$，$\cos(iz) = \cosh z$ 的特殊情形）

$$\sin(iy) = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i\,\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = i\sinh y, \qquad \cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \cosh y.$$

当 $y \to \infty$ 时 $|\sin(iy)| = \sinh y \to \infty$，$\cosh y \to \infty$。所以 $\sin z, \cos z$ 在复平面上是*无界*的。（这与后面将学到的结论一致：有界的整函数必为常数；$\sin z$、$\cos z$ 既不是常数，当然就是无界的。）

例：$\sin i$ 与 $\cos i$

由定义，取 $z = i$，则 $e^{iz} = e^{i\cdot i} = e^{-1}$，$e^{-iz} = e^{1} = e$，所以

$$\sin i = \frac{e^{-1} - e}{2i} = i\,\frac{e - e^{-1}}{2} \approx 1.1752\,i, \qquad \cos i = \frac{e^{-1} + e}{2} \approx 1.5431.$$

补充说明：$|\sin i| \approx 1.175 > 1$，$\cos i \approx 1.543 > 1$，再次说明复三角函数不再被 1 所限制。

例：解方程 $\sin z = \dfrac{1}{2}$

解：由定义，方程化为

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2}.$$

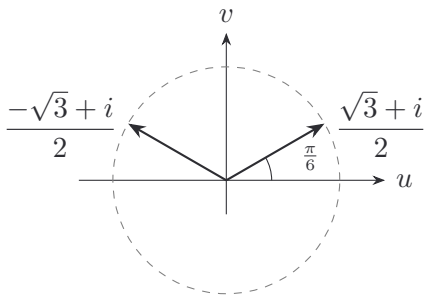
令 $w = e^{iz}$，则 $e^{-iz} = w^{-1}$，方程化为

$$w - w^{-1} = i \quad \Longrightarrow \quad w^{2} - iw - 1 = 0.$$

解这个关于 w 的一元二次方程：

$$w = \frac{i \pm \sqrt{-1 + 4}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}.$$

这两个根的模都是 1：$|w|^{2} = \dfrac{3 + 1}{4} = 1$；辐角分别是 $\dfrac{\pi}{6}$（对应 $w = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$）和 $\dfrac{5\pi}{6}$（对应 $w = \dfrac{-\sqrt{3} + i}{2}$）。



再回到未知数 $z=x+iy$：

$$e^{iz}=w=e^{i(x+iy)}=e^{-y+ix}.$$

取模得 $|w|=e^{-y}$。因为 $|w|=1$，所以 $e^{-y}=1$，即 $y=0$。于是 z 是实数 x，$e^{ix}=w$，所以 x 就是 w 的辐角（相差 $2k\pi$）：

$$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\qquad\text{或}\qquad x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

因此原方程的全部解为

$$\boxed{z=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \text{ 或 }\ z=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}}$$

□

补充说明：有意思的是，虽然 $\sin z$ 在复平面上是无界的，方程 $\sin z=\dfrac{1}{2}$ 却**没有非实数的解**，所有的解就是实数范围内原有的那些。但这并不总是如此：例如 $\sin z=2$ 就没有实数解，它的解是 $z=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\pm i\ln(2+\sqrt{3})$（$k\in\mathbb{Z}$）。解法与上面完全一样：令 $w=e^{iz}$ 化成关于 w 的一元二次方程，再由 $w=e^{-y+ix}$ 的模和辐角分别求出 y 与 x。

例：解方程 $\cos z=2$

解：由定义，方程化为

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=2.$$

令 $w=e^{iz}$，则 $e^{-iz}=w^{-1}$，方程化为

$$w+w^{-1}=4\quad\Longrightarrow\quad w^2-4w+1=0\quad\Longrightarrow\quad w=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=2\pm\sqrt{3}.$$

这两个根都是正实数（并且 $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$）。再令 $z=x+iy$，则

$$e^{iz}=e^{-y+ix}=e^{-y}(\cos x+i\sin x).$$

要使它等于正实数 $2\pm\sqrt{3}$，模与辐角必须分别相等：

$$e^{-y}=2\pm\sqrt{3},\qquad\cos x+i\sin x=1.$$

于是

$$x=2k\pi,\qquad y=-\ln(2\pm\sqrt{3})\qquad(k\in\mathbb{Z}),$$

这里的 ln 是**实数范围内的对数**（大一学的对数函数）。由于 $2-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$，$-\ln(2-\sqrt{3})=\ln(2+\sqrt{3})$，所以方程的全部解可以合写成

$$\boxed{z=2k\pi\pm i\ln\left(2+\sqrt{3}\right),\quad k\in\mathbb{Z}}$$

□

补充说明：与 $\sin z=\dfrac{1}{2}$ 的例子对照：实数范围内 $\cos x=2$ 无解，但复数范围内有解，而且解都落在直线 $x=2k\pi$ 上。验证：$\cos(iy)=\cosh y$，令 $\cosh y=2$ 得 $y=\pm\ln(2+\sqrt{3})$，再平移 $2k\pi$ 就是上面的结果。

其他三角函数

类似地，可以定义

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\qquad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z},\qquad \sec z=\frac{1}{\cos z},\qquad \csc z=\frac{1}{\sin z},$$

它们在分母不为零的点处解析（商的求导法则）。

补充说明：$\cos z$ 的零点只有实数 $\frac{\pi}{2}+k\pi$：$\cos z=0$ 即 $w^2+1=0$（$w=e^{iz}$），$w=\pm i$，$|w|=e^{-y}=1$ 推出 $y=0$，其余步骤与前面的例子完全一样。同理 $\sin z$ 的零点只有 $k\pi$。所以 $\tan z$ 在 $z\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ 处解析，$\cot z$ 在 $z\neq k\pi$ 处解析。

1.5　初等多值函数

回顾与引入

上一节我们研究了初等函数 e^z，$\cos z$，$\sin z$。这一节要研究它们的“反函数”。

在实数范围内，e^x 是严格单调的，所以它有反函数 $\ln x$。但在复数范围内，e^z 是周期函数（周期为 $2k\pi i$），e^z 取同一个值的点有无穷多个，因此“反函数”不再是一个普通的函数：一个 z 会对应*许多个* w。同样地，$w^n=z$ 的解有 n 个，所以根式 $\sqrt[n]{z}$ 也有 n 个值。

像这样，对定义域中的一个 z，对应*不止一个*函数值的对应关系，称为**多值函数**。（我们此前讨论的函数都是单值函数。）这一节的主要任务就是：怎样把多值函数“理顺”，用单值函数的办法去研究它。

约定：以下用 $\arg z$ 表示辐角的**主值**，即满足 $-\pi<\arg z\leq\pi$ 的那个辐角；用 $\operatorname{Arg}z$ 表示 z 的*全部*辐角的集合：

$$\operatorname{Arg}z=\{\arg z+2k\pi:k\in\mathbb{Z}\}.$$

对数函数

定义

规定对数函数为指数函数的反函数。即：若

$$e^w=z\qquad(z\neq0,\ z\neq\infty),$$

则称 w 为 z 的**对数**，记为 $\operatorname{Ln}z$（它是一个*集合*）。

补充说明：为什么要排除 $z=0$ 与 $z=\infty$？因为 $|e^w|=e^{\operatorname{Re}w}>0$，所以 e^w 永远不会等于 0，也不会等于 ∞，0 与 ∞ 没有对数。

$\operatorname{Ln} z$ 的计算

令 $z = re^{i\theta}$（$r = |z| > 0$），$w = u + iv$。则

$$e^w = e^u e^{iv} = re^{i\theta}.$$

两个复数相等，模相等、辐角相差 2π 的整数倍：

$$e^u = r, \qquad v = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

于是 $u = \ln r = \ln |z|$（这是实数的对数，就是大一学过的对数函数），所以

$$\boxed{\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}}$$

注记：**对数函数多值的原因，来自于辐角的多值性！** $\ln |z|$ 是实数的对数，是单值的；虚部 $\operatorname{Arg} z$ 每个 z 有无穷多个取值，彼此相差 2π 的整数倍，所以 $\operatorname{Ln} z$ 的任意两个值也相差 $2\pi i$ 的整数倍。

研究多值函数的两种方式

(1) **通过规定辐角的范围，得到单值函数。**例如规定辐角取 $(-\pi, \pi]$，就得到了单值函数（对数函数的**主值**，见下面）。这种做法是把 $\operatorname{Ln} z$ 的无穷多个值中挑出一个，作为“代表”。

(2) **构造新的“定义域”**（由 B. Riemann 提出）。不去挑选，而是把函数的定义域本身改造一下，使得多值函数在新的定义域上变成单值函数。这样得到的新定义域称为**黎曼面**（Riemann surface），见本节后面。

对数函数的主值

定义

规定辐角取主值 $-\pi < \arg z \le \pi$，得到一个单值函数

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z \qquad (-\pi < \arg z \le \pi),$$

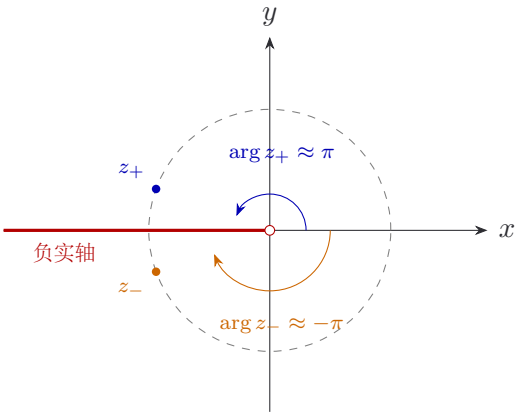
称为 $\operatorname{Ln} z$ 的**主值**。于是 $\operatorname{Ln} z$ 的全部值是 $\ln z$ 加上 $2\pi i$ 的整数倍：

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

特别地，当 z 是正实数时，$\ln z = \ln |z|$ 就是原来的实对数函数，这说明主值是实对数函数的推广。

图像：不满意的地方

主值 $\ln z$ 的实部 $\ln|z|$ 在 $z\neq 0$ 处是连续的。问题出在虚部 $\arg z$ 上：



负实轴上的点 $z_0=-a\ (a>0)$ 的辐角主值是 π。但如果 z 从**上方**趋于 z_0，$\arg z\to\pi$；如果从**下方**趋于 z_0，$\arg z\to-\pi$。两个极限不同，所以 $\arg z$，从而 $\ln z$，在负实轴上**失去连续性**（虚部有 2π 的“跳跃”）。原点本来就不在定义域里。

解决办法：割开复平面

既然问题出在负实轴上，我们就**去掉负实轴**（连同原点）：在

$$D=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]=\{z\in\mathbb{C}:-\pi<\arg z<\pi\}$$

上，$\arg z$ 是连续函数，于是 $\ln z$ 成为**连续**的单值函数。这就是所谓“**割开复平面**”：沿着负实轴把平面剪开，不允许 z 穿过这条割线。

补充说明：割线并不一定要取负实轴：取任意一条从原点出发、伸向无穷远的射线（甚至一条曲线）都可以；取负实轴是最常用的选择。不同的割法，得到的是 $\operatorname{Ln} z$ 的不同单值分支。

验证解析性：极坐标下的柯西—黎曼方程

在 D 上，$\ln z=\ln r+i\theta$（$z=re^{i\theta}$，$-\pi<\theta<\pi$）。要验证它解析，用极坐标比用直角坐标方便得多。为此先导出**极坐标形式的 C-R 方程**。

预备：极坐标下的 C-R 方程

设 $f(z)=u+iv$，$z=re^{i\theta}=r\cos\theta+ir\sin\theta$（$r>0$），$u,v$ 看成 (r,θ) 的函数。由链式法则（$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$）：

$$u_r=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta,\qquad \frac{u_\theta}{r}=-u_x\sin\theta+u_y\cos\theta,$$

v 同理。写成矩阵形式，记 $R=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$（旋转矩阵），则

$$\begin{pmatrix}u_r\\ u_\theta/r\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}u_x\\ u_y\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}v_r\\ v_\theta/r\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\end{pmatrix}.$$

记 $J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$（旋转 90°）。直角坐标的 C-R 方程 $u_x=v_y$，$u_y=-v_x$ 恰好写成 $\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}u_x\\ u_y\end{pmatrix}$。两边同时左乘旋转矩阵 R，并利用 **两个旋转矩阵可交换**（$RJ=JR$），得

$$\begin{pmatrix}v_r\\ v_\theta/r\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}u_r\\ u_\theta/r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-u_\theta/r\\ u_r\end{pmatrix}.$$

由于 R 可逆，上述推导每一步都可以倒着走，所以这是一个等价的条件：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}}$$

这就是极坐标形式的（“新的”）C-R 方程。

补充说明：在 $r>0$ 处，$(r,\theta)\mapsto(x,y)$ 是光滑的变量替换，Jacobi 行列式为 $r\neq 0$，所以 u,v 关于 (x,y) 有连续偏导数，等价于关于 (r,θ) 有连续偏导数。因此，由前面的推论：**若 u,v 关于 (r,θ) 有连续偏导数且满足上面的极坐标 C-R 方程，则 f 在该点可导。**

补充说明（导数公式）：此时还有

$$f'(z)=e^{-i\theta}\,(u_r+i\,v_r).$$

这是因为 $u_r+iv_r=(u_x+iv_x)\cos\theta+(u_y+iv_y)\sin\theta$，再用 C-R 方程 $u_y=-v_x$，$v_y=u_x$，得 $u_r+iv_r=(u_x+iv_x)(\cos\theta+i\sin\theta)=f'(z)\,e^{i\theta}$。

用来验证 $\ln z$

在 D 上 $u=\ln r$，$v=\theta$，

$$u_r=\frac{1}{r},\quad u_\theta=0,\quad v_r=0,\quad v_\theta=1,$$

所以 $u_r=\dfrac{1}{r}v_\theta$，$v_r=-\dfrac{1}{r}u_\theta$（两个都成立），并且四个偏导数在 D 内都连续。因此 $\ln z$ 在 D 内解析，且

$$(\ln z)'=e^{-i\theta}\Big(\frac{1}{r}+i\cdot 0\Big)=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{z}.$$

结论

$$\boxed{\ln z = \ln|z| + i\arg z \quad (-\pi < \arg z < \pi) \text{ 是}D\text{ 内的解析函数，} \quad (\ln z)' = \frac{1}{z}}$$

补充说明：这个导数公式与实变量的 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ 完全一样。它也可以由反函数求导法“形式地”得到：$e^w = z$ 两边对 z 求导，$e^w \cdot w' = 1$，所以 $w' = \dfrac{1}{e^w} = \dfrac{1}{z}$。

补充说明（各个分支）：对每个固定的整数 k，

$$\ln z + 2k\pi i, \qquad z \in D$$

也是 D 内的单值解析函数，导数同样是 $\dfrac{1}{z}$。它们称为 $\operatorname{Ln} z$ 的**分支**；$k = 0$ 就是主值分支。这就是“固定 k，割开复平面”的处理方式：割开之后，$\operatorname{Ln} z$ 分裂成可以单独研究的无穷多个单值解析函数。

例与性质

例：实数的对数

设 $a \in \mathbb{R}$，$a \neq 0$，则

$$\operatorname{Ln} a = \ln|a| + i\ \operatorname{Arg} a.$$

- 当 $a > 0$ 时，$\operatorname{Arg} a = 2k\pi$，所以 $\operatorname{Ln} a = \ln a + 2k\pi i$；
- 当 $a < 0$ 时，$\operatorname{Arg} a = (2k+1)\pi$，所以 $\operatorname{Ln} a = \ln|a| + (2k+1)\pi i$。例如 $\operatorname{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i$。

补充说明：在实数范围内，负数没有对数；但在复数范围内负数的对数是存在的，只不过它们的虚部不是 0，而是 π 的奇数倍。

例：$\operatorname{Ln}(1+i)$

$|1+i| = \sqrt{2}$，$\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$，所以

$$\operatorname{Ln}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

性质

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2.$$

这里等号两边都是集合，右边表示“$\operatorname{Ln} z_1$ 中任取一个值，加上 $\operatorname{Ln} z_2$ 中任取一个值”所得到的所有数组成的集合。

证明：$\ln|z_1z_2| = \ln|z_1| + \ln|z_2|$（实对数的性质）；又 $\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$（复数相乘，辐角相加；左右两边都是“某个辐角加上 2π 的所有整数倍”）。两个等式合起来即得结论。 □

Be Careful!

注意：对**主值**，等式

$$\ln(z_1z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \qquad \textbf{不成立（一般）}$$

原因是：虽然 $\arg z_1 + \arg z_2$ 是 z_1z_2 的一个辐角，但它不一定落在 $(-\pi, \pi]$ 里，不一定等于主值 $\arg(z_1z_2)$。

反例：取 $z_1 = z_2 = -1 + i$。$|-1+i| = \sqrt{2}$，$\arg(-1+i) = \dfrac{3\pi}{4}$，所以

$$\ln z_1 + \ln z_2 = 2\ln\sqrt{2} + i\,\frac{3\pi}{2} = \ln 2 + \frac{3\pi}{2}\,i.$$

但是 $z_1z_2 = (-1+i)^2 = -2i$，$\arg(-2i) = -\dfrac{\pi}{2}$，

$$\ln(z_1z_2) = \ln 2 - \frac{\pi}{2}\,i.$$

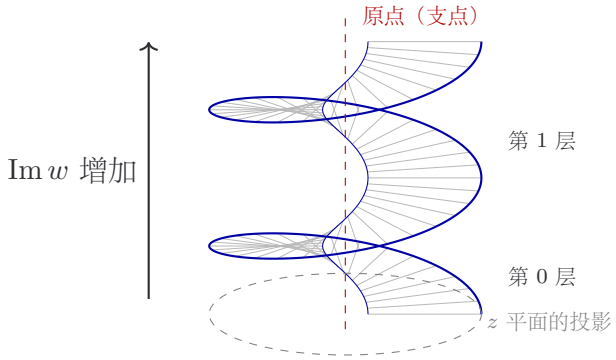
两者相差 $2\pi i$，不相等。

补充说明：类似地，$\operatorname{Ln}(z^2) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z$，但**不等于** $2\operatorname{Ln} z$。例如 $z = i$：$\operatorname{Ln}(i^2) = \operatorname{Ln}(-1) = \{(2m+1)\pi i\}$ 包含所有奇数倍的 πi；而 $2\operatorname{Ln} i = \{2(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i\} = \{(1+4k)\pi i\}$ 只包含 $\pi i, 5\pi i, -3\pi i, \ldots$，不含 $3\pi i$。多值函数的运算要特别当心集合的含义。

研究方式 2：黎曼面

回到前面的第二种方式。主值方式中，我们把负实轴割开，从上方穿到下方时函数值会“跳”到另一个分支，这件事看起来是个麻烦。Riemann 的想法是：**别把它当成麻烦，而是把不同的分支粘起来，构成一个新的“定义域”**让 $\operatorname{Ln} z$ 在这个新定义域上变成单值函数。

具体做法：取无穷多个复平面的复制品 D_k（$k \in \mathbb{Z}$），每一个都沿负实轴剪开，并在 D_k 上取分支 $\ln z + 2k\pi i$。验证：在 D_k 的**上岸**（趋于负实轴的上方），分支的值趋于 $\ln|z| + i\pi + 2k\pi i$；在 D_{k+1} 的**下岸**，分支的值趋于 $\ln|z| - i\pi + 2(k+1)\pi i = \ln|z| + i\pi + 2k\pi i$，两者相等。所以把 D_k 的上岸与 D_{k+1} 的下岸粘在一起，函数值就连续地接上了。粘完之后的曲面像一个螺旋形的楼梯（螺旋面）：围着原点转一圈，就上升到下一层，永远转不回原来的那一层。



补充说明：在这个螺旋面上，$w=\operatorname{Ln} z$ 成为**单值**的解析函数，并且它把螺旋面一一对应地映成整个 w 平面（D_k 对应水平带形 $(2k-1)\pi<\operatorname{Im} w<(2k+1)\pi$，这正是前面 e^z 把带形映成割开平面的“反方向”）。这样的曲面称为 $\operatorname{Ln} z$ **的黎曼面**。黎曼面的理论是后面学习解析延拓、多值函数时的基本工具，这里只做直观介绍。

根式函数：类似的处理方式

对根式函数 $w=\sqrt[n]{z}$（$n\geq 2$ 为整数，$z\neq 0,\infty$），也可以用同样的办法处理。

由 $w^n=z$，写 $z=re^{i\theta}$，$w=\rho e^{i\varphi}$，则 $\rho^n=r$，$n\varphi=\theta+2k\pi$，所以

$$w=|z|^{1/n}\,e^{\,i\frac{\theta+2k\pi}{n}},\qquad k=0,1,\dots,n-1.$$

这给出 n 个不同的值（k 再增加 n，辐角增加 2π，值不变），所以 $\sqrt[n]{z}$ 是 n 值函数。它的多值性同样来自于辐角的多值性。

固定 k，割开复平面

和对数函数一样：割开负实轴，在 $D=\{-\pi<\arg z<\pi\}$ 上取 $\arg z$，并**固定一个** k，得到单值函数

$$w_k(z)=|z|^{1/n}\,e^{\,i\frac{\arg z+2k\pi}{n}},\qquad -\pi<\arg z<\pi.$$

其中 $k=0$ 的那一支 $|z|^{1/n}e^{i\arg z/n}$ 称为**主值**（板书上写作 $\sqrt[n]{z}=|z|^{1/n}e^{\frac{i\arg z}{n}}$，$-\pi<\arg z<\pi$）。

补充说明：$w_k(z)=e^{\frac{1}{n}(\ln z+2k\pi i)}$，所以它是 D 内的解析函数（指数函数与对数函数的复合），并且

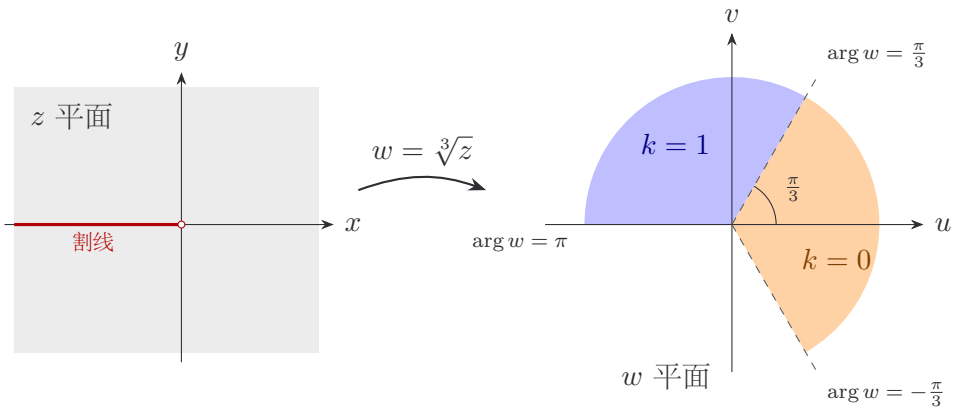
$$w_k'(z)=\frac{1}{nz}\,w_k(z).$$

像：z 平面 $\to$ w 平面

在 w_k 之下，$\arg w=\dfrac{\arg z+2k\pi}{n}$，而 $\arg z\in(-\pi,\pi)$，所以 D 被映成角形区域

$$\frac{(2k-1)\pi}{n}<\arg w<\frac{(2k+1)\pi}{n},$$

张角为 $\dfrac{2\pi}{n}$。当 $k=0$ 时是以正实轴为对称轴的角形区域 $-\dfrac{\pi}{n}<\arg w<\dfrac{\pi}{n}$；$k=1,2,\dots,n-1$ 则依次得到旁边的几个角形区域，n 个角形区域合起来铺满了整个 w 平面（除去边界射线）。下图取 $n=3$：



补充说明：割线（负实轴）的上岸被映到角形区域的一条边界射线，下岸被映到另一条边界射线。在 z 平面上围绕原点转一圈（要穿过割线），$\arg z$ 增加 2π，w_k 就变成了 w_{k+1}，也就是跳到了相邻的那个角形区域；转 n 圈后才回到原来的值 w_k。所以 $\sqrt[n]{z}$ 的黎曼面由 n 层平面循环地粘成（第 n 层的上岸粘回第 1 层的下岸），而对数函数的黎曼面则有无穷多层，而且永远不会粘回到起点。原点 $z=0$ 是这两个函数的共同特殊点，称为**支点**。

一般指数函数

定义

设 $\alpha\neq 0$（α 为复常数），称

$$\boxed{w=\alpha^z:=e^{z\operatorname{Ln}\alpha}}$$

为**一般指数函数**。

注记：α^z 是多值函数（因为 $\operatorname{Ln}\alpha$ 是多值的），但是**一旦指定了 $\operatorname{Ln}\alpha$ 的某个具体值，α^z 就是单值函数**。

补充说明：指定 $\operatorname{Ln}\alpha=c$（$c$ 是一个确定的复数，$e^c=\alpha$）之后，$\alpha^z=e^{cz}$ 就是前面的指数函数的复合，是整函数，并且

$$(\alpha^z)'=ce^{cz}=(\operatorname{Ln}\alpha)\,\alpha^z\quad(\text{这里}\operatorname{Ln}\alpha\text{ 取指定的那个值}).$$

当 $\alpha=e$ 且取 $\operatorname{Ln}e=1$ 时，e^z 就还原为前面定义的复指数函数。

补充说明（和我们熟悉的情形对照）：写 $\operatorname{Ln}\alpha=\ln|\alpha|+i(\arg\alpha+2k\pi)$，则 $\alpha^z=e^{z\ln|\alpha|+iz\arg\alpha}\cdot e^{2k\pi iz}$。所以不同的 k 之间只差因子 $e^{2k\pi iz}$：

- 当 z 是整数时，$e^{2k\pi iz}=1$，α^z 只有一个值（就是通常的整数次幂）；
- 当 $z=\dfrac{p}{q}$ 是既约分数（$q\geq 2$）时，只有 q 个不同的值，例如 $\alpha^{1/n}$ 就是 α 的 n 个 n 次方根，与前面的根式函数一致；
- 当 z 是无理数或非实数时，通常有无穷多个值。

例： i^{-1}

因为 $|i|=1$，$\arg i=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\operatorname{Ln} i=i\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$。于是

$$\begin{aligned} i^{-1}&=e^{-1\cdot\operatorname{Ln} i}=e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}=e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-2k\pi\right)}\\ &=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i\ \left(=\frac{1}{i}\right). \end{aligned}$$

补充说明：无论 k 取什么整数，结果都是 $-i$：指数是整数时，α^z 是单值的，与前面补充说明里的第一种情形一致，结果也和 $\dfrac{1}{i}=-i$ 相符。

例： $i^{(1+i)}$

$$\begin{aligned} i^{(1+i)}&=e^{(1+i)\operatorname{Ln} i}=e^{(1+i)\cdot i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\\ &=e^{\left(-\frac{\pi}{2}-2k\pi\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\\ &=i\,e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},\qquad k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

补充说明：这里 $(1+i)\cdot i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)=i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)$，实部是 $-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)$，决定了结果的模 $e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$；虚部 $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 决定了结果的辐角，它与 $\frac{\pi}{2}$ 只差 2π 的整数倍，所以每个值都是 i 的正实数倍。不同的 k 给出不同的模，因此 i^{1+i} 有无穷多个不同的值，例如 $k=0$ 时为 $e^{-\pi/2}\,i\approx 0.2079\,i$，$k=-1$ 时为 $e^{3\pi/2}\,i\approx 111.3\,i$。

补充说明：类似地，$z^{\alpha}:=e^{\alpha\operatorname{Ln} z}$ 称为**一般幂函数**。当 $\alpha=\dfrac{1}{n}$ 时，$z^{1/n}=e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln} z}$ 就是前面的根式函数 $\sqrt[n]{z}$。