微分几何讲义

课堂笔记整理

编撰人： Clover

2026 年秋季学期

目录

第一章　预备知识 3

1.1 三维欧氏空间中的标架 3

1.2 向量值函数 7

第二章　曲线论 11

2.1 正则参数曲线 11

2.2 曲线弧长 16

2.3 曲线的曲率和 Frenet 标架 18

2.4 曲线挠率及 Frenet 公式 27

2.5 曲线分类定理 34

2.6 曲线参数方程在一点的标准展开 42

2.7 平面曲线 52

1

第一章

预 备 知 识

1.1 三维欧氏空间中的标架

笛卡尔标架

记三维欧氏空间为 E^3。在 E^3 中指定一点 O，再取三个两两正交的单位向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$，使它们满足**右手法则**，就得到 E^3 中的一个**笛卡尔标架**（或称笛卡尔坐标系）

$$\{O;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k}\},\qquad O\in E^3,\ \ \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}\text{ 是右手系单位正交标架.}$$

点与坐标的一一对应

在上述坐标系下，对任意 $P\in E^3$，都唯一对应一个**位置向量** $\overrightarrow{OP}$：

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x,y,z)\begin{pmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{pmatrix}.$$

于是得到一列一一对应关系

$$P\ \longleftrightarrow\ \overrightarrow{OP}\ \longleftrightarrow\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$$

即笛卡尔坐标系把 E^3 中的几何点等同于 $\mathbb{R}^3$ 中的坐标三元组。

所有笛卡尔标架构成的集合 C

记

$$C=\{\,E^3\text{ 中所有的笛卡尔坐标系}\,\}.$$

C 的结构：$C \cong \mathbb{R}^3 \times SO(3)$

任取 C 中一个元素，即 E^3 中另一个笛卡尔坐标系 $\{O';\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}'\}$，它满足：

(1) $O' \in E^3$；

(2) $|\vec{\imath}'| = |\vec{\jmath}'| = |\vec{k}'| = 1$（单位向量）；

(3) $\vec{\imath}' \cdot \vec{\jmath}' = \vec{\jmath}' \cdot \vec{k}' = \vec{\imath}' \cdot \vec{k}' = 0$（两两正交）；

(4) 右手法则：$\vec{\imath}' \times \vec{\jmath}' = \vec{k}'$，$\vec{\jmath}' \times \vec{k}' = \vec{\imath}'$，$\vec{k}' \times \vec{\imath}' = \vec{\jmath}'$。

下面把 $\{O';\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}'\}$ 在 $\{O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ 下坐标化。

原点的位置：

$$\overrightarrow{OO'} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k} = \vec{a}\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{pmatrix}, \qquad \vec{a} = (a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3.$$

基向量的分解：

$$\vec{\imath}' = a_{11}\vec{\imath} + a_{12}\vec{\jmath} + a_{13}\vec{k} = (a_{11},a_{12},a_{13})\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{pmatrix},$$

$$\vec{\jmath}' = a_{21}\vec{\imath} + a_{22}\vec{\jmath} + a_{23}\vec{k} = (a_{21},a_{22},a_{23})\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{pmatrix},$$

$$\vec{k}' = a_{31}\vec{\imath} + a_{32}\vec{\jmath} + a_{33}\vec{k} = (a_{31},a_{32},a_{33})\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{pmatrix}.$$

把三个式子叠在一起，记 $A = (a_{lm})_{3\times 3}$，就有

$$\begin{pmatrix}\vec{\imath}'\\ \vec{\jmath}'\\ \vec{k}'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{pmatrix}.$$

条件 2)、3) 合起来等价于 $AA^{\mathrm{T}} = I_{3\times 3}$，即 $A \in O(3)$，从而 $\det A = \pm 1$；条件 4)（右手系）等价于

$$(\vec{\imath}' \times \vec{\jmath}') \cdot \vec{k}' = \det A = 1,$$

即 $A \in SO(3) = \{$ 行列式为 1 的 3×3 实正交矩阵 $\}$。

于是一个笛卡尔坐标系恰好由一对数据 $(\vec{a},A) \in \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ 决定：

$$C \;\cong\; \mathbb{R}^3 \times SO(3), \qquad \dim SO(3) = 3, \quad \dim C = 6.$$

两个待解决的问题

Q1. 空间 E^3 中同一点 P，在两套不同的笛卡尔坐标系下的坐标之间是什么关系?

Q2. E^3 中的一个刚体运动，在给定坐标系下应该如何用坐标变换来表示?

Q1：同一点在两套坐标系下的坐标变换

设 $P\in E^3$ 在坐标系 $\{O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ 与 $\{O';\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}'\}$（对应数据 $(\vec{a},A)$）下的坐标分别为 (x,y,z) 与 (x',y',z')，即

$$\overrightarrow{OP}=(x,y,z)\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{O'P}=(x',y',z')\begin{pmatrix}\vec{\imath}'\\ \vec{\jmath}'\\ \vec{k}'\end{pmatrix}=(x',y',z')A\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{pmatrix}.$$

由 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}$，得

$$(x,y,z)\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{pmatrix}=\vec{a}\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{pmatrix}+(x',y',z')A\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{pmatrix}=\big(\vec{a}+(x',y',z')A\big)\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{pmatrix}.$$

两边基向量的坐标必须相等，因此

$$(x,y,z)=\vec{a}+(x',y',z')A,\qquad A\in SO(3).$$

Q2：刚体运动下点的坐标变换

物体的**刚体运动**是保持其上任意两点间距离不变的运动。要研究一个指定标架 $\{O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ 经刚体运动后扫出的轨迹，等价于研究 E^3 中*任意一点* P 在该刚体运动下的运动轨迹——因为标架也不过是几个特殊的点（原点与三个单位向量的端点）。

设运动前 P 在 $\{O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ 下坐标为 (x,y,z)，即 $\overrightarrow{OP}=(x,y,z)\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{pmatrix}$。刚体运动把标架 $\{O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ 搬到另一个笛卡尔坐标系 $\{O';\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}'\}$（对应数据 $(\vec{a},A)$），同时把 P 搬到 P'。因为刚体运动不改变“点相对于标架的坐标”，P' 相对新标架的坐标仍是 (x,y,z)，即

$$\overrightarrow{O'P'}=(x,y,z)\begin{pmatrix}\vec{\imath}'\\ \vec{\jmath}'\\ \vec{k}'\end{pmatrix}=(x,y,z)A\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{pmatrix}.$$

设 P' 在原坐标系 $\{O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ 下的坐标为 (x',y',z')。由 $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P'}$，

$$(x',y',z')\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{pmatrix}=\overrightarrow{OP'}=\vec{a}\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{pmatrix}+(x,y,z)A\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{pmatrix}=\big(\vec{a}+(x,y,z)A\big)\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k}\end{pmatrix},$$

所以

$$(x', y', z') = \vec{a} + (x, y, z)A, \qquad A \in SO(3).$$

这就是刚体运动 $(\vec{a}, A) \in \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ 在坐标系 $\{O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ 下的坐标表示：平移部分由 $\vec{a}$ 给出，转动部分由 $A \in SO(3)$ 给出。反过来，物体上任一点原来坐标为 (x, y, z)，经这个刚体运动后落到的新点 P'，在原坐标系下的坐标记为 (x', y', z')，就满足上面这条公式——这正是 Q2 的答案。

定理 1.1：坐标系变换与刚体运动的对应

把 Q1、Q2 的结果合在一起看，就得到

(1) E^3 中的笛卡尔坐标系，经 E^3 中任意一个刚体运动作用后，变化为 E^3 中另一个笛卡尔坐标系；

(2) 反之，对 E^3 中任何两个笛卡尔坐标系，必存在 E^3 中的一个刚体运动，把其中一个笛卡尔坐标系变换为另一个。

换句话说，刚体运动群 $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ 在所有笛卡尔坐标系构成的集合 C 上的作用是**可迁的**：任给 C 中两个元素，都恰好存在一个刚体运动把前者搬到后者——这也正好呼应了前面 $C \cong \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ 这个结论：C 本身就可以看成刚体运动群自己的一个”陪集空间”。

推广：仿射标架、度量矩阵与仿射变换

上面讨论的 $\{O'; \vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}'\}$ 始终是单位正交的（对应 $A \in O(3)$ 或 $SO(3)$）。如果放弃”单位正交” 这个限制，允许 E^3 中任意一点 O' 配上任意一组线性无关的向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$（不必单位、不必正交），就得到一个更一般的**仿射标架** $\{O'; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$。

同样把 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ 在 $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ 下坐标化，记

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{pmatrix}, \qquad A \in GL(3, \mathbb{R}) \text{ (可逆即可，不再要求正交).}$$

定义

$$g_{ij} := \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \qquad 1 \le i, j \le 3.$$

容易验证 $(g_{ij})_{3\times 3} = AA^{\mathrm{T}}$，它总是一个正定对称矩阵，称为这个标架的**度量矩阵**。于是：

- $A \in O(3) \iff AA^{\mathrm{T}} = I_{3\times 3} \iff (g_{ij}) = I_{3\times 3}$，即 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ 仍是单位正交标架——这时对应的坐标变换保持长度与夹角，称为 E^3 中的**等距变换**；

- 再加上 $\det A = 1$，即 $A \in SO(3)$，对应的就是前面讨论的**刚体运动**（还额外保持定向）；
- 一般的 $A \in GL(3,\mathbb{R})$ 不再要求 $(g_{ij}) = I$，对应的坐标变换只保持”直线变直线、平行变平行”，称为 E^3 中的**仿射变换**。

三者之间是一条包含关系链：

$$\mathbb{R}^3 \times SO(3) \ \subset \ \mathbb{R}^3 \times O(3) \ \subset \ \mathbb{R}^3 \times GL(3,\mathbb{R}),$$

分别对应

$$E^3 \text{ 中的刚体运动} \ \subset \ E^3 \text{ 中的等距变换} \ \subset \ E^3 \text{ 中的仿射变换}.$$

本课程之后主要关心的是最左边、最”刚性”的一类——刚体运动。

1.2 向量值函数

E^3 中向量之间的运算

固定笛卡尔坐标系 $\{O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$，把 E^3 中的向量与 $\mathbb{R}^3$ 中的坐标三元组等同起来。设

$$\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}, \qquad \vec{w} = w_1\vec{\imath} + w_2\vec{\jmath} + w_3\vec{k}.$$

1）加、减法与数乘

按坐标分量逐项相加减、逐项数乘，与线性代数中一致，此处不再赘述。

2）内积

$\{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ 是单位正交标架，等价于说在这组基下 E^3（或 $\mathbb{R}^3$）已经配备了标准度量，即 $\{O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ 下的度量矩阵为 $I_{3\times3}$（回忆上一节”度量矩阵”的定义）。因此**内积**（记作 $\cdot$ 或 $\langle\cdot,\cdot\rangle$）可以直接按坐标定义：

$$\vec{v}\cdot\vec{w} := v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3.$$

由此可以推出内积的几何意义：

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|\,|\vec{w}|\cos\angle(\vec{v},\vec{w}).$$

3）叉乘积

叉乘积 $\vec{v}\times\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ 可以通过规定

$$\vec{\imath}\times\vec{\jmath} = \vec{k}, \qquad \vec{\jmath}\times\vec{k} = \vec{\imath}, \qquad \vec{k}\times\vec{\imath} = \vec{\jmath}$$

（即右手法则），再按双线性展开得到。写成行列式的形式：

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\ v_1&v_2&v_3\\ w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v_2&v_3\\ w_2&w_3\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}v_1&v_3\\ w_1&w_3\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}v_1&v_2\\ w_1&w_2\end{vmatrix}\vec{k}.$$

4）混合积

三个向量 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ 的**混合积**定义为

$$(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3):=(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)\cdot\vec{v}_3=\langle\vec{v}_1\times\vec{v}_2,\ \vec{v}_3\rangle,$$

可以直接写成行列式

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\ v_1&v_2&v_3\\ w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}.$$

一元向量值函数

一个**一元向量值函数**是一个映射

$$\vec{r}:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3,\qquad t\longmapsto\vec{r}(t):=(x(t),\,y(t),\,z(t)),$$

即由三个分量函数 $x(t),y(t),z(t)$ 拼成的一个 $\mathbb{R}^3$ 值函数。

导数

向量值函数关于 t 的导数可以通过 $x(t),y(t),z(t)$ 各自关于 t 的导数来定义：

$$\frac{d\vec{r}}{dt}:=\big(x'(t),\,y'(t),\,z'(t)\big).$$

等价地，

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

积分

类似地，

$$\int_a^b\vec{r}(t)\,dt=\left(\int_a^b x(t)\,dt,\ \int_a^b y(t)\,dt,\ \int_a^b z(t)\,dt\right).$$

求导法则：内积、叉乘、混合积的 Leibniz 公式

关于 t 求导对内积、叉乘、混合积这三种”乘法”运算都满足 Leibniz（乘积）法则，这是因为它们都是（多重）线性运算，逐分量用普通函数的乘积求导法则即可得到。设 $\vec{a}(t),\vec{b}(t),\vec{c}(t)$ 是可导的向量值函数，则：

(1) $\big(\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t)\big)' = \vec{a}\,'\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}\,'$;

(2) $\big(\vec{a}(t)\times\vec{b}(t)\big)' = \vec{a}\,'\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}\,'$;

(3) $\big(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\big)' = (\vec{a}\,',\vec{b},\vec{c})+(\vec{a},\vec{b}\,',\vec{c})+(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,')$。

再补充一条常用的三重叉积公式（可以直接按坐标展开验证）：

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \langle\vec{a},\vec{c}\rangle\vec{b} - \langle\vec{b},\vec{c}\rangle\vec{a},$$

以及它的一个推论——两对叉乘之间的内积：

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix}\langle\vec{a},\vec{c}\rangle & \langle\vec{a},\vec{d}\rangle\\ \langle\vec{b},\vec{c}\rangle & \langle\vec{b},\vec{d}\rangle\end{vmatrix}.$$

常长、定向与共面的刻画

设 $\vec{a}=\vec{a}(t)$ 是关于 t 处处非零、二阶连续可导的向量值函数。下面三条刻画在曲线论中会反复用到。

（1）$|\vec{a}(t)|$ 为常数 $\iff$ $\vec{a}\cdot\vec{a}\,'\equiv 0$

因为 $|\vec{a}|$ 是常数当且仅当 $|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$ 是常数，而

$$\frac{d}{dt}\big(\vec{a}\cdot\vec{a}\big) = 2\,\vec{a}\cdot\vec{a}\,',$$

所以 $|\vec{a}(t)|\equiv$ 常数 $\iff$ $\vec{a}\cdot\vec{a}\,'\equiv 0$。

（2）$\vec{a}(t)$ 方向不变 $\iff$ $\vec{a}\times\vec{a}\,'\equiv 0$

这里”方向不变”是指存在一个固定的非零向量 $\vec{a}_0$，使得 $\vec{a}(t)\parallel\vec{a}_0$ 对一切 t 成立。

若 $\vec{a}(t)=f(t)\vec{a}_0$（$f(t)\neq 0$），则 $\vec{a}\,'=f'(t)\vec{a}_0$，从而 $\vec{a}\times\vec{a}\,'=f(t)f'(t)(\vec{a}_0\times\vec{a}_0)=0$。

反之，设 $\vec{a}\times\vec{a}\,'\equiv 0$。记 $\vec{a}_0(t):=\vec{a}(t)/|\vec{a}(t)|$（单位化，良定义，因为 $\vec{a}(t)\neq 0$），则 $\vec{a}=|\vec{a}|\,\vec{a}_0$，且 $|\vec{a}_0|\equiv 1$。由 Leibniz 公式，

$$0=\vec{a}\times\vec{a}\,' = \big(|\vec{a}|\vec{a}_0\big)\times\big(|\vec{a}|'\vec{a}_0+|\vec{a}|\vec{a}_0\,'\big) = |\vec{a}|^2\,(\vec{a}_0\times\vec{a}_0\,'),$$

（用到 $\vec{a}_0\times\vec{a}_0=0$），而 $|\vec{a}|\neq 0$，所以 $\vec{a}_0\times\vec{a}_0\,'\equiv 0$，即 $\vec{a}_0\,'$ 与 $\vec{a}_0$ 平行。另一方面，$|\vec{a}_0|\equiv 1$ 是常数，由 (1) 得 $\vec{a}_0\cdot\vec{a}_0\,'\equiv 0$，即 $\vec{a}_0\,'$ 与 $\vec{a}_0$ 垂直。一个向量既与非零向量 $\vec{a}_0$ 平行又与它垂直，只能是零向量，故 $\vec{a}_0\,'\equiv 0$，即 $\vec{a}_0(t)$ 恒等于某个固定向量 $\vec{a}_0$。于是 $\vec{a}(t)=|\vec{a}(t)|\,\vec{a}_0$ 恒与固定方向 $\vec{a}_0$ 平行。

（3）$\vec{a}(t)$ 始终在过原点的一个固定平面内 $\Longleftrightarrow$ $(\vec{a},\vec{a}',\vec{a}'')\equiv 0$

这里额外假设 $\vec{a}\times\vec{a}'\neq 0$ 对一切 t 成立（即 $\vec{a}(t)$ 不是（2）中那种退化的、方向恒定的情形）。

必要性：若存在固定非零向量 $\vec{l}_0$，使得 $\vec{a}(t)\cdot\vec{l}_0\equiv 0$（$\vec{a}(t)$ 始终落在以 $\vec{l}_0$ 为法向量、过原点的平面内），两边对 t 求导得 $\vec{a}'\cdot\vec{l}_0\equiv 0$，再求导得 $\vec{a}''\cdot\vec{l}_0\equiv 0$。于是 $\vec{a},\vec{a}',\vec{a}''$ 都与同一个非零向量 $\vec{l}_0$ 垂直，三者落在同一个二维子空间（$\vec{l}_0$ 的正交补）中，从而必线性相关，混合积 $(\vec{a},\vec{a}',\vec{a}'')\equiv 0$。

充分性：反之设 $(\vec{a},\vec{a}',\vec{a}'')\equiv 0$。记 $\vec{b}(t):=\vec{a}\times\vec{a}'\neq 0$，由 Leibniz 公式及 $\vec{a}'\times\vec{a}'=0$，

$$\vec{b}'=\vec{a}'\times\vec{a}'+\vec{a}\times\vec{a}''=\vec{a}\times\vec{a}''.$$

利用三重叉积公式 $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=\langle\vec{u},\vec{w}\rangle\vec{v}-\langle\vec{v},\vec{w}\rangle\vec{u}$（取 $\vec{u}=\vec{a},\vec{v}=\vec{a}',\vec{w}=\vec{a}\times\vec{a}''$），并注意到 $\langle\vec{a},\vec{a}\times\vec{a}''\rangle=0$（向量与自己和另一个向量的叉积恒垂直）以及 $\langle\vec{a}',\vec{a}\times\vec{a}''\rangle=-(\vec{a},\vec{a}',\vec{a}'')=0$，得到

$$\vec{b}\times\vec{b}'=(\vec{a}\times\vec{a}')\times(\vec{a}\times\vec{a}'')=0\cdot\vec{a}'-0\cdot\vec{a}=0.$$

既然 $\vec{b}(t)\neq 0$ 且 $\vec{b}\times\vec{b}'\equiv 0$，由（2）知存在固定非零向量 $\vec{l}_0$，使 $\vec{b}(t)=\vec{a}\times\vec{a}'$ 恒与 $\vec{l}_0$ 平行。而 $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{a}')\equiv 0$ 恒成立，所以 $\vec{a}\cdot\vec{l}_0\equiv 0$——即 $\vec{a}(t)$ 始终落在以 $\vec{l}_0$ 为法向量、过原点的固定平面内。

2

第二章

曲 线 论

2.1 正则参数曲线

参数曲线的定义

E^3 中的**参数曲线** C 定义为一个由区间 I（不妨设 $I=[a,b]$）到 E^3 的连续映射，通常记作

$$C:\ \vec{r}=\vec{r}(t),\qquad t\in I=[a,b],$$

其中 $\vec{r}(t)$ 是关于 t 的连续向量值函数。这是最一般意义下的”曲线”，此时并不要求 $\vec{r}(t)$ 可导，更谈不上正则；后面的”正则参数曲线”是在此基础上加上可导性、正则性等进一步限制得到的。

称曲线 C 在 t 处**可导**，如果映射 $\vec{r}=\vec{r}(t)$ 在 t 处可导，即

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\,'(t)$$

存在。

切向量与切线

若在 $t=t_0$ 处 $\vec{r}\,'(t_0)\neq\vec{0}$，就称 t_0（或点 $\vec{r}(t_0)$）为曲线 C 上的一个**正则点**（regular point）；否则称 t_0 为**奇点**。在正则点处，向量 $\vec{r}\,'(t_0)$ 称为曲线 C 在该点的**切向量**，它给出了曲线在 t_0 处的瞬时运动方向；规定曲线 C 的**正向**为 t 增大的方向。过点 $\vec{r}(t_0)$、以 $\vec{r}\,'(t_0)$ 为方向向量的直线

$$\vec{x}-\vec{r}(t_0)=\lambda\,\vec{r}\,'(t_0),\qquad \lambda\in\mathbb{R}^1$$

称为曲线 C 在 t_0 处的**切线**——直观上它是过 $\vec{r}(t_0)$ 附近割线的极限位置。

正则参数曲线的定义

称满足如下两个条件的 E^3 中参数曲线 $C:\vec{r}=\vec{r}(t)$，$t\in I=[a,b]$，为 E^3 中的一条**正则参数曲线**：

(1) $\vec{r}=\vec{r}(t)$ 处处可导，且 $\vec{r}'(t)\neq\vec{0}$ 处处成立（即 I 上每一点都是正则点）；

(2) $\vec{r}=\vec{r}(t)$ 关于 t 至少三阶连续可导，即 $\vec{r}\in C^3(I)$。

条件 (2) 是独立于条件 (1) 的一条额外光滑性要求：一条曲线即使处处正则（满足条件 (1)），如果只是一般的可导而不是三阶连续可导，也不满足这里”正则参数曲线”的定义。之所以要求至少三阶连续可导，是因为后面定义曲率、挠率等量时要用到 $\vec{r}$ 的二阶、三阶导数，提前假设 C^3 光滑可以保证这些量处处有意义、且连续依赖于 t。本章以后如无特别说明，”曲线”都指同时满足以上两个条件的正则参数曲线。

参数变换与曲线的等价

同一条几何曲线，其参数方程往往因为参数选取不同而形式不同。设曲线 C 分别有参数 t 与参数 u 下的两个正则参数曲线方程

$$C:\ \vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\qquad t=t(u),$$

$$C:\ \vec{r}=\vec{r}(u)=(x(u),y(u),z(u)),\qquad u=u(t),$$

即 t 与 u 之间存在一个变换 $t=t(u)$（或反过来 $u=u(t)$）。规定这样的变换是 t 与 u 之间的一个**等价关系**，当且仅当它满足以下两个条件：

条件 1. $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\neq 0$（等价地 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\neq 0$）处处成立。这一条件等价于：曲线 C 上同一点 P 处的正则性，与究竟用 t 还是用 u 作参数无关。事实上由链式法则

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t},$$

只要 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\neq 0$，$\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\neq\vec{0}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}u}\neq\vec{0}$ 就同时成立或同时不成立；反过来，如果在某点处 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}=0$，那么即使 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\neq\vec{0}$，也可能出现 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}u}=\vec{0}$，正则性就无法在两种参数之间对应保持。

条件 2. 函数 $u=u(t)$（或 $t=t(u)$）至少三阶连续可导，这与正则参数曲线本身要求的光滑性（条件 (2)）保持一致。

满足以上两个条件的参数变换称为**容许参数变换**。把曲线 C 上所有通过容许参数变换互相联系的正则参数曲线方程归为一类，这样得到的等价类本身称为一条**正则曲线**——它是比”正则参数曲线”更本质的几何对象：一条正则曲线可以有很多种参数表示，这些表示只是同一条正则曲线的不同”名字”。

在容许参数变换中，如果 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}>0$（保持定向），称对应的两个参数表示**同向**；如果 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}<0$，称二者**反向**。这把每一条正则曲线的参数表示进一步分成两类（互为反向），每一类连同其中共同的定向，称为一条**有向正则曲线**。

例：螺旋线

设 $a>0$，$b\neq 0$ 为常数，

$$\vec{r}(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt),\qquad t\in\mathbb{R},$$

称为**螺旋线**。求导得

$$\vec{r}\,'(t)=(-a\sin t,\ a\cos t,\ b),\qquad |\vec{r}\,'(t)|^2=a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2=a^2+b^2>0,$$

对一切 t 都不为零向量，所以螺旋线处处正则；又因为 $\vec{r}(t)$ 的各分量都是三角函数或一次函数，任意阶导数都存在且连续（$\vec{r}\in C^\infty\subset C^3$），条件 (2) 自动满足，所以螺旋线是一条正则参数曲线。

例：半三次曲线

考虑平面曲线

$$\vec{r}(t)=(t^2,\ t^3,\ 0),\qquad t\in\mathbb{R},$$

称为**半三次曲线**（也叫尖点立方曲线）。求导得

$$\vec{r}\,'(t)=(2t,\ 3t^2,\ 0).$$

当 $t=0$ 时 $\vec{r}\,'(0)=\vec{0}$，$t=0$ 是一个奇点（几何上对应曲线的尖点，图像在原点处不光滑）；当 $t\neq 0$ 时 $\vec{r}\,'(t)\neq\vec{0}$，其余各点都正则。注意 $\vec{r}(t)$ 本身是多项式函数，处处 C^∞ 光滑，条件 (2)（三阶连续可导）在整条曲线上都成立，问题只出在条件 (1)（正则性）在 $t=0$ 处失效。这个例子说明条件 (1)、(2) 是两件独立的事：”正则”是逐点的性质，一条曲线的参数表示可能整体光滑，却只在部分区间上正则。

两种常见的表示方式

显式（Euler）表示

如果曲线可以写成

$$y=y(x),\qquad z=z(x),\qquad x\in(\alpha,\beta)$$

的形式（即取 x 本身作参数，$\vec{r}(x)=(x,y(x),z(x))$），就称这是曲线的**显式表示**。此时

$$\vec{r}\,'(x)=(1,\ y'(x),\ z'(x))$$

中第一个分量恒为 1，自动满足 $\vec{r}\,'(x)\neq\vec{0}$，所以只要 y,z 可导，显式表示的曲线自动是正则的。

隐式表示：两曲面之交

如果曲线是两个曲面

$$f(x,y,z)=0,\qquad g(x,y,z)=0$$

的交集（局部而言），就称这是曲线的**隐式表示**。

命题（正则点处存在局部显式表示）：设 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 是正则参数曲线，t_0 是其上一点。则存在 t_0 的一个邻域，使得曲线在该邻域内可以改写成显式表示（即可以取 x,y,z 三个坐标之一作参数）。

证明：因为 $\vec{r}\,'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))\neq\vec{0}$，三个分量中至少有一个不为零，不妨设 $x'(t_0)\neq0$（其余情形同理，换成 y 或 z）。把 $x=x(t)$ 看成 t 的函数，由 $x'(t_0)\neq0$ 及反函数存在定理，$x(t)$ 在 t_0 的某邻域内严格单调、连续可导，从而存在局部可导的反函数 $t=t(x)$，定义在 $x_0=x(t_0)$ 的某邻域内。于是在对应的邻域内

$$y=y(t(x))=:y(x),\qquad z=z(t(x))=:z(x)$$

就把曲线表示成了以 x 为参数的显式形式。■

这说明局部来看，正则参数曲线、显式表示和（满足一定条件的）隐式表示是可以互相转化的；只有在整体上，才需要区分这三种描述方式的适用范围。

隐式表示（两曲面之交）的切向量与正则性

设曲线是 $f=0$ 与 $g=0$ 的交，$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 是其一个参数表示，记 $\vec{r}\,'(t)=(x',y',z')$。因为曲线上的点都同时满足两个曲面方程，把 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ 代入，就有恒等式

$$f(x(t),y(t),z(t))\equiv0,\qquad g(x(t),y(t),z(t))\equiv0.$$

两边对 t 求导（链式法则，即对隐函数关于 t 求导）：

$$\langle\nabla f,\ \vec{r}\,'(t)\rangle=0,\qquad \langle\nabla g,\ \vec{r}\,'(t)\rangle=0,$$

即切向量 $\vec{r}\,'(t)$ 同时与 ∇f、∇g 正交。当 ∇f 与 ∇g 线性无关时，与二者都正交的方向在 $\mathbb{R}^3$ 中只有一维，而 $\nabla f\times\nabla g$ 正是这样一个（非零的）方向，所以

$$\vec{r}\,'(t)\parallel\nabla f\times\nabla g.$$

问：什么时候 t 是这条曲线的正则点？把 $\nabla f \times \nabla g$ 按分量写开，

$$\nabla f \times \nabla g = \big(f_y g_z - f_z g_y,\ \ f_z g_x - f_x g_z,\ \ f_x g_y - f_y g_x\big),$$

这三个分量恰好（至多差一个符号）就是 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix}$$

的三个 2×2 子式。所以 $\nabla f \times \nabla g \neq \vec{0}$ 与"J 的秩为 2（即 $\nabla f, \nabla g$ 线性无关）" 是同一件事——这就是隐式表示下的**正则性判别条件**。下面证明它是曲线在该点正则的**充分条件**。

命题：若在曲线上一点 P 处 $\nabla f \times \nabla g \neq \vec{0}$，则 P 是该曲线的正则点（即曲线在 P 附近存在正则参数表示）。

证明：$\nabla f \times \nabla g \neq \vec{0}$ 意味着上面三个 2×2 子式中至少有一个不为零，不妨设 $\det \begin{pmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{pmatrix} \neq 0$（其余两种情形，即换成关于 (x,z) 或 (x,y) 的子式非零，完全同理，只是把充当参数的坐标换成 y 或 z）。由多元隐函数定理，方程组 $f(x,y,z)=0, g(x,y,z)=0$ 在 P 附近可以唯一地解出 $y=y(x)$、$z=z(x)$，也就是说曲线在 P 附近有显式表示 $\vec{r}(x)=(x,y(x),z(x))$。而前面已经证明，显式表示的曲线自动正则（$\vec{r}\,'(x)=(1,y'(x),z'(x))$ 第一个分量恒为 1，不可能是零向量）。所以 P 是正则点。■

反过来，" 曲线在 P 点正则" 并不能反推出 $\nabla f \times \nabla g \neq \vec{0}$——如果两个曲面 $f=0, g=0$ 沿交线处处相切（即处处 $\nabla f \parallel \nabla g$），交线本身仍可能是一条光滑的正则曲线，但 $\nabla f \times \nabla g$ 会沿交线恒为 $\vec{0}$。例如取 $f=z$（平面 $z=0$）、$g=z-x^2$（抛物柱面），两曲面的交线是 $\{x=0, z=0\}$（即 y 轴），可以正则地参数化为 $\vec{r}(t)=(0,t,0)$，$\vec{r}\,'(t)=(0,1,0)$ 处处非零；但沿交线 $\nabla f=(0,0,1)$、$\nabla g=(-2x,0,1)|_{x=0}=(0,0,1)$ 恒相等（两曲面沿交线处处相切），所以 $\nabla f \times \nabla g \equiv \vec{0}$。可见 $\nabla f \times \nabla g \neq \vec{0}$ 只是正则性的**充分**条件而非必要条件；它真正刻画的是" 两曲面在该点横截相交（不相切）"，这比" 交线正则" 要求更强。本讲义在说" 隐式表示下的正则性判别条件" 时，指的是两曲面横截相交的通常情形；如果遇到两曲面相切的退化情形，交线是否正则需要另外具体分析，不能再用 $\nabla f \times \nabla g$ 是否为零来判断。

这与前面" 正则点附近存在局部显式表示" 的命题是一致的：$\nabla f \times \nabla g \neq \vec{0}$ 时，由隐函数定理，$f=0, g=0$ 在该点附近可以解出其中两个坐标关于第三个坐标的函数，也就得到了局部显式表示。

2.2 曲线弧长

弧长函数的定义

设 $C:\vec{r}=\vec{r}(t)$，$t\in I$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中一条参数曲线。定义 C 由 $t=a$ 到 $t=b$（$a\le b$，$a,b\in I$）的**弧长**为

$$S:=\int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

更一般地，固定起点 $t=a$，对 I 上任意 t（$t\ge a$），定义 C 上由 $t=a$ 到 t 的**弧长函数**

$$S(t):=\int_a^t |\vec{r}\,'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau.$$

直观上，$|\vec{r}\,'(t)|\,\mathrm{d}t$ 是 $t\to t+\mathrm{d}t$ 这段时间内点 $\vec{r}(t)$ 走过的”无穷小路程”（即 $\vec{r}\,'(t)$ 的瞬时速率），积分起来 $S(t)$ 就是曲线从起点走到参数 t 处所经过的长度；取 $t=b$ 就回到前面定义的（从 a 到 b 的）弧长 $S=S(b)$。

弧长函数的不变性

命题：设 $C:\vec{r}=\vec{r}(t)$，$t\in[a,b]$ 是一条正则曲线，$S(t)$ 是它（从 $t=a$ 起算的）弧长函数，则 $S(t)$ 具有如下两条不变性：

(1) $S(t)$ 在曲线 C 关于 E^3 中的刚体运动下保持不变；

(2) 曲线 C 的（保持定向的）参数变换下，$S(t)$ 也保持不变，即弧长不依赖于参数的选取。

(1) **的证明**：设 $A:C\to\widehat{C}$ 是 C 在 E^3 中的任意一个刚体运动，即 C 与 $\widehat{C}$ 之间的向量方程 $C:\vec{r}=\vec{r}(t)$ 和 $\widehat{C}:\vec{r}=\widehat{\vec{r}}(t)$ 满足

$$\widehat{\vec{r}}(t)=\vec{a}+A\,\vec{r}(t),\qquad A\in SO(3),\ \vec{a}\in\mathbb{R}^3$$

（$\vec{a}$ 是平移向量）。因为 $A,\vec{a}$ 是常数，求导得 $\widehat{\vec{r}}\,'(t)=A\,\vec{r}\,'(t)$；又 $A\in SO(3)$ 满足 $A^{\mathrm{T}}A=I$，所以对任意向量 $\vec{v}$ 都有 $\langle A\vec{v},A\vec{v}\rangle=\langle\vec{v},\vec{v}\rangle$，即 $|A\vec{v}|=|\vec{v}|$（A 保持长度不变）。从而 C 上相应于由 $t=a$ 到 t 的弧长函数 $\widehat{S}(t)$ 满足

$$\widehat{S}(t)=\int_a^t|\widehat{\vec{r}}\,'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau=\int_a^t|A\,\vec{r}\,'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau=\int_a^t|\vec{r}\,'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau=S(t).$$

即弧长函数在刚体运动下保持不变。■ 这一事实与第一章”刚体运动”的讨论相呼应：刚体运动是保持一切距离不变的变换，弧长作为曲线的”长度”自然也应当是刚体运动不变量。

(2) **的证明**：设曲线 C 有如下两套参数 t 及 u 下的参数方程：

$$C:\ \vec{r}=\vec{r}(t),\ t\in[a,b],\qquad \text{与}\qquad C:\ \vec{r}=\tilde{\vec{r}}(u),\ u\in[c,d],$$

其中 $t=\varphi(u)$（或反过来 $u=\varphi^{-1}(t)$）是一个容许参数变换，满足 $\varphi'(u)>0$ 处处成立（保持定向），且 $\varphi(c)=a$。设 $t\in[a,b]$ 对应于 $u=\varphi^{-1}(t)\in[c,d]$（即 t 与 u 对应同一个点 $\vec{r}(t)=\tilde{\vec{r}}(u)$）。由链式法则

$$\vec{r}\,'(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\tilde{\vec{r}}}{\mathrm{d}u}\Big/\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\quad\Longleftrightarrow\quad\tilde{\vec{r}}\,'(u)=\vec{r}\,'(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u},$$

从而 $|\tilde{\vec{r}}\,'(u)|=|\vec{r}\,'(t)|\,\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}$（因为 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}=\varphi'(u)>0$，可以去掉绝对值）。于是，记 u 从 c 到 $\varphi^{-1}(t)$ 对应的弧长为 $\tilde{S}(u)$，

$$\tilde{S}\big(\varphi^{-1}(t)\big)=\int_c^{\varphi^{-1}(t)}|\tilde{\vec{r}}\,'(u)|\,\mathrm{d}u=\int_c^{\varphi^{-1}(t)}|\vec{r}\,'(\varphi(u))|\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u\overset{t=\varphi(u)}{=}\int_a^{t}|\vec{r}\,'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau=S(t),$$

最后一步用了换元积分法。这说明：只要两个参数表示对应同一个点，用它们各自算出来的（从各自起点算起的）弧长就相等；弧长是曲线本身的几何量，不依赖于参数表示的选取。■

弧长的微分关系与弧长参数

由 $S(t)=\displaystyle\int_a^t|\vec{r}\,'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$ 和微积分基本定理（变上限积分求导），立即得到

命题：

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=|\vec{r}\,'(t)|,\qquad\text{即}\qquad\mathrm{d}S=|\vec{r}\,'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

如果把弧长函数 $S(t)$ 本身当作曲线的新参数使用（记这个新参数为 $s=S(t)$），就称 s 为曲线 C 上的一个**弧长参数**。

Th 2.1：设曲线 $C:\vec{r}=\vec{r}(t)$ 是一条正则曲线，则参数 t（本身）就是 C 上的一个弧长参数，当且仅当 $|\vec{r}\,'(t)|\equiv1$ 成立。

必要性证明：若 t 是曲线 C 上从某点起算的弧长参数，即 $t=S(t)+c_0$（c_0 为常数，对应弧长起点的选择），两边对 t 求导得 $1=\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$；再由上面的命题 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=|\vec{r}\,'(t)|$，所以 $|\vec{r}\,'(t)|\equiv1$ 成立。

充分性证明：反之，若 $|\vec{r}\,'(t)|\equiv1$，则由命题 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=|\vec{r}\,'(t)|\equiv1$，两边积分得

$$S(t)=t+c,\qquad c\text{ 为常数}.$$

即 $S(t)$ 与 t 只相差一个常数——这个常数恰好对应于弧长起算点（$S(t)=0$ 的位置）的不同选取。所以 t（在允许相差一个常数、即允许选择不同弧长起点的意义下）本身就是 C 上的一个弧长参数。■

Th 2.1 的意义在于：以后要判断一个给定的参数 t 是否已经是弧长参数，只需验证 $|\vec{r}\,'(t)|\equiv1$（即曲线是否**单位速率**参数化），而不需要真的去计算积分 $S(t)$；这是后面定义曲率、挠率时反复要用到的判据。

2.3 曲线的曲率和 Frenet 标架

处理方式：把曲线嵌入到标架空间

以往教材通常的做法是：把曲线 C 直接嵌入到 $E^3 \cong \mathbb{R}^3\{O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ 中，即只关心曲线上每一点的位置 $\vec{r}(t)\in\mathbb{R}^3$，再另外定义切向量、法向量等辅助量。

本讲义采用的做法是：把曲线 C 嵌入到"E^3 上所有单位（标准正交）坐标系构成的集合" 中，而这个集合正是第一章里构造过的 $C\cong\mathbb{R}^3\times SO(3)$！也就是说，在曲线的每一点都附上一个完整的、随点连续变化的标准正交标架，而不只是一个位置向量：

$$t \longmapsto \big(\vec{r}(t);\ \vec{\alpha}(t),\vec{\beta}(t),\vec{\gamma}(t)\big)\in\mathbb{R}^3\times SO(3).$$

直觉上，这个标架应该可以由 $\vec{r}'(t),\vec{r}''(t),\vec{r}'''(t)$ 出发构造出来（通过某种归一化、正交化的过程）；下面在弧长参数下把这一构造严格化。这样得到的、随曲线连续变化的标架 $\{\vec{r}(t);\vec{\alpha}(t),\vec{\beta}(t),\vec{\gamma}(t)\}$ 称为曲线的**Frenet 标架**（也叫**活动标架**）。

Frenet 标架的定义

如下定义正则参数曲线 $C:\vec{r}=\vec{r}(t)$ 的 Frenet 标架 $\{\vec{r}(t);\vec{\alpha}(t),\vec{\beta}(t),\vec{\gamma}(t)\}$：要求 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 满足

(1) $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$（都是单位向量）；

(2) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=0$（两两正交）；

(3) $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{\gamma}$，$\vec{\beta}\times\vec{\gamma}=\vec{\alpha}$，$\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}=\vec{\beta}$（右手系，关系式与 $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ 完全一致）。

条件 (1)(2)(3) 合起来正是说 $\{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\}$ 在每一点都构成 $\mathbb{R}^3$ 的一个标准正交右手基，即 $(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma})\in SO(3)$，与前面" 嵌入到 $\mathbb{R}^3\times SO(3)$" 的想法完全吻合。

单位切向量与曲率

一个自然的想法：取

$$\vec{\alpha}(t):=\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}.$$

特别地，当 $t=s$ 就是弧长参数时，由 Th 2.1，$|\vec{r}'(s)|\equiv 1$，所以此时 $\vec{\alpha}(s)=\vec{r}'(s)=\dot{\vec{r}}(s)$（这里用 $\dot{}$ 表示对弧长参数 s 求导，以区别对一般参数 t 求导的 $'$）。以下总在弧长参数 s 下讨论。

注意到 $|\vec{\alpha}(s)|\equiv 1$，根据第一章 §2 定理 2.2 中结论 (1)（"$|\vec{a}(t)|$ 恒为常数 $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{a}'\equiv 0$"），立即得到

$$\vec{\alpha}(s)\cdot\dot{\vec{\alpha}}(s)=0,\qquad \text{即}\qquad \vec{\alpha}\perp\dot{\vec{\alpha}}.$$

这样，只要 $\dot{\vec{\alpha}}(s)\neq\vec{0}$，就可以令

$$\vec{\beta}(s):=\frac{\dot{\vec{\alpha}}(s)}{|\dot{\vec{\alpha}}(s)|}=\frac{\ddot{\vec{r}}(s)}{|\ddot{\vec{r}}(s)|}.$$

定义（曲率）：称 $|\dot{\vec{\alpha}}(s)|=|\ddot{\vec{r}}(s)|$ 为曲线 C 在弧长参数 s 处的**曲率**（curvature），记作

$$k(s):=|\dot{\vec{\alpha}}(s)|=|\ddot{\vec{r}}(s)|.$$

Frenet 标架的构造

下面假设曲线 C 在 s 处处满足 $k(s)\neq 0$（即处处 $\ddot{\vec{r}}(s)\neq\vec{0}$），在此假设下定义 C 在 s 处的 Frenet 标架：

$$\vec{\alpha}=\dot{\vec{r}}(s),\qquad \vec{\beta}=\frac{\ddot{\vec{r}}(s)}{|\ddot{\vec{r}}(s)|}=\frac{\dot{\vec{\alpha}}}{k},\qquad \vec{\gamma}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\frac{\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}}{|\ddot{\vec{r}}|}=\frac{\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}}{k}.$$

容易验证（by construction）这三个向量确实两两正交、都是单位向量，且满足右手关系，所以 $\{\vec{r}(s);\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\}$ 就是一个合法的 Frenet 标架。

曲率恒为零：直线情形

命题：设 $C:\vec{r}=\vec{r}(s)$（s 为弧长参数）是 E^3 中一条正则曲线，则 C 上恒有 $k(s)\equiv 0$，当且仅当 C 是 E^3 中的一条直线（段）。

证明：（必要性）若 $k(s)\equiv 0$，由曲率的定义 $k(s)=|\ddot{\vec{r}}(s)|$，知 $\ddot{\vec{r}}(s)\equiv\vec{0}$ 对所有 s 成立。两边对 s 积分一次，得 $\dot{\vec{r}}(s)\equiv\vec{\alpha}_0$ 为一个常向量（因为导数恒为零 $\Longleftrightarrow$ 函数本身是常值）。又因为 s 是弧长参数，由 Th 2.1，$|\dot{\vec{r}}(s)|\equiv 1$，所以 $|\vec{\alpha}_0|=1$。再积分一次，得

$$\vec{r}(s)=s\vec{\alpha}_0+\vec{r}_0,$$

其中 $\vec{r}_0$ 是另一个常向量。这正是一条过 $\vec{r}_0$、方向为 $\vec{\alpha}_0$ 的直线（以弧长 s 为参数）。

（充分性）反之，若 C 是一条直线段，取其弧长参数表示 $\vec{r}(s)=s\vec{\alpha}_0+\vec{r}_0$（$|\vec{\alpha}_0|=1$ 为常向量），则 $\dot{\vec{r}}(s)\equiv\vec{\alpha}_0$，$\ddot{\vec{r}}(s)\equiv\vec{0}$，从而 $k(s)=|\ddot{\vec{r}}(s)|\equiv 0$。■

注：当 $k(s)\equiv 0$ 时，Frenet 标架的标准构造方式（取 $\vec{\beta}(s):=\dot{\vec{\alpha}}(s)/|\dot{\vec{\alpha}}(s)|$）失效，因为此时 $\dot{\vec{\alpha}}(s)\equiv\vec{0}$，分母为零，$\vec{\beta}$ 无法由曲线本身的几何唯一确定。处理方式是：因为 C 是直线，$\vec{\alpha}(s)\equiv\vec{\alpha}_0$（常向量），不妨任意选定一点 $s=s_0$，以及一个以 $\vec{\alpha}(s_0)=\vec{\alpha}_0$ 为第一个向量的右手标准正交坐标系 $\{\vec{r}(s_0);\vec{\alpha}(s_0),\vec{\beta}_0,\vec{\gamma}_0\}$（$\vec{\beta}_0,\vec{\gamma}_0$ 的选取不唯一，只需满足两两正交、右手系的条件），然后从 $s=s_0$ 出发，沿直线 C 把这个标架前后**平行移动**（即对所有 s 都取 $\vec{\alpha}(s):=\vec{\alpha}_0$，$\vec{\beta}(s):=\vec{\beta}_0$，$\vec{\gamma}(s):=\vec{\gamma}_0$ 不变），这样就构成了 C 上的一个活动标架，也可以称为 C 的 Frenet 标架——但要注意，与 $k(s)\neq 0$ 时不同，这里的标架**不是由曲线本身唯一确定的**，它依赖于 $\vec{\beta}_0,\vec{\gamma}_0$ 的（任意）选取。

孤立零点处的 Frenet 标架

再讨论另一种情形：$k(s)$ 不恒为零，但在某一点 $s=s_0$ 处 $k(s_0)=0$（孤立零点），而在 s_0 左右两侧附近处处 $k(s)\neq 0$。

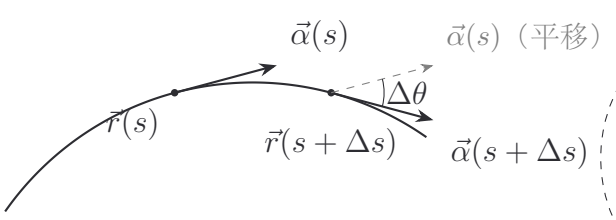
此时 C 在 s_0 左、右两侧分别有良定义的 Frenet 标架（因为两侧 $k\neq 0$，可以按前面的构造公式分别定义）。

- 若这两侧标架当 $s\to s_0^-$ 与 $s\to s_0^+$ 时的极限恰好相等，就可以用这个公共极限，把 Frenet 标架通过延拓的方式定义到 s_0 处，从而得到 C 上整体连续的活动标架；
- 若左右极限不相等（无法延拓成连续的标架），那么就不在 s_0 处强行定义统一的 Frenet 标架，而是在 s_0 两侧分段研究曲线。

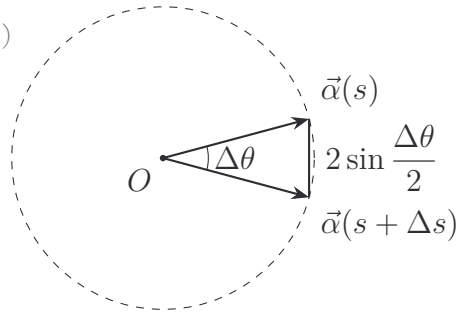
曲率的几何意义

命题：考虑 E^3 中一条正则曲线 $C:\vec{r}=\vec{r}(s)$，s 为弧长参数，$\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(s)$ 为 C 在 s 处的单位切向量。记 $\Delta\theta(s)$ 表示 C 在 s 到 $s+\Delta s$ 处切方向 $\vec{\alpha}(s)$ 与 $\vec{\alpha}(s+\Delta s)$ 之间的夹角，则

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|=|\dot{\vec{\alpha}}(s)|=k(s).$$



曲线 C 上 s 与 $s+\Delta s$ 两点处的切向量



平移到公共点 O（单位圆上）比较

证明：因为 $\vec{\alpha}(s)$ 恒为单位向量，可以把 $\vec{\alpha}(s)$ 与 $\vec{\alpha}(s+\Delta s)$ 都放到（过原点的）一个平面上的单位圆周上，二者夹角为 $\Delta\theta$。对于圆上夹角 $\Delta\theta$ 的两个单位向量，用等腰三角形（或直接计算 $|\vec{u}-\vec{v}|^2=2-2\cos\Delta\theta$）可得

$$|\vec{\alpha}(s+\Delta s)-\vec{\alpha}(s)|=2\left|\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right|.$$

又由导数的定义，

$$\dot{\vec{\alpha}}(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\vec{\alpha}(s+\Delta s)-\vec{\alpha}(s)}{\Delta s},$$

所以

$$|\dot{\vec{\alpha}}(s)|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\vec{\alpha}(s+\Delta s)-\vec{\alpha}(s)|}{|\Delta s|}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\left|\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right|}{|\Delta s|}=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|,$$

最后一步用了 $\Delta\theta \to 0$ 时 $\sin(\Delta\theta/2)/(\Delta\theta/2) \to 1$（等价无穷小）。■

这就是曲率的几何意义：曲率 $k(s)$ 描述了曲线上切方向的夹角相对于弧长 s 的变化速率——曲线转得越”急”，切方向变化得越快，曲率就越大；直线的切方向恒定不变，曲率处处为零。

切线像、主法向量与副法向量

(1) 称曲线 $\widetilde{C}:\vec{r}=\vec{\alpha}(s)\in S^2(1)$（单位球面）为曲线 C 的**切线像**。

(2) 称 C 在 s 处的 $\vec{\alpha}(s)$ 为 s 处的（单位）**切向量**；$\vec{\beta}(s)$ 为 s 处的**单位主法向量**；$\vec{\gamma}(s)$ 为 s 处的**单位副法向量**（也叫次法向量，binormal）。

曲线上的特殊直线与平面

利用 Frenet 标架 $\{\vec{r}(s);\vec{\alpha}(s),\vec{\beta}(s),\vec{\gamma}(s)\}$，可以在曲线的每一点定义三条特殊的直线：

- C 在 s 处的**切线**：过 $\vec{r}(s)$、沿 $\vec{\alpha}(s)$ 方向的直线，方程为 $\vec{X}-\vec{r}(s)=\lambda\vec{\alpha}(s)$，$\lambda\in\mathbb{R}^1$；
- C 在 s 处的**主法线**：过 $\vec{r}(s)$、沿 $\vec{\beta}(s)$ 方向的直线，方程为 $\vec{X}-\vec{r}(s)=\lambda\vec{\beta}(s)$，$\lambda\in\mathbb{R}^1$；
- C 在 s 处的**副法线**：过 $\vec{r}(s)$、沿 $\vec{\gamma}(s)$ 方向的直线，方程为 $\vec{X}-\vec{r}(s)=\lambda\vec{\gamma}(s)$，$\lambda\in\mathbb{R}^1$。

以及三个特殊的平面，都过 $\vec{r}(s)$，分别以 $\{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\}$ 中的一个方向为法向量、另外两个方向为张成平面的基：

- **法平面**：以 $\vec{\alpha}(s)$ 为法向量，即 $\mathrm{span}\{\vec{\beta},\vec{\gamma}\}$ 方向的平面，方程为 $\langle\vec{X}-\vec{r}(s),\vec{\alpha}(s)\rangle=0$；
- **密切平面**：以 $\vec{\gamma}(s)$ 为法向量，即 $\mathrm{span}\{\vec{\alpha},\vec{\beta}\}$ 方向的平面，方程为 $\langle\vec{X}-\vec{r}(s),\vec{\gamma}(s)\rangle=0$；
- **从切平面**（也叫校正平面）：以 $\vec{\beta}(s)$ 为法向量，即 $\mathrm{span}\{\vec{\alpha},\vec{\gamma}\}$ 方向的平面，方程为 $\langle\vec{X}-\vec{r}(s),\vec{\beta}(s)\rangle=0$。

一般参数下 Frenet 标架与曲率的计算公式

前面 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},k$ 的构造都是在弧长参数 s 下给出的。但实际计算时，曲线往往是以一般参数 t（不一定是弧长参数）给出的，比如 $\vec{r}=\vec{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$ 这样的参数方程。下面的问题是：对于一般参数 t 下给出的正则曲线 $C:\vec{r}=\vec{r}(t)$，如何直接用 $\vec{r}'(t),\vec{r}''(t)$ 算出 $\vec{\alpha}(t),\vec{\beta}(t),\vec{\gamma}(t)$ 及 $k(t)$（假设 $\ddot{\vec{r}}(s)\neq\vec{0}$，即 $k\neq0$ 处）？

由 $S(t)=\int_a^t|\vec{r}'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$ 及其微分关系（见曲线弧长一节），$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=|\vec{r}'(t)|$，即 $\mathrm{d}s=|\vec{r}'|\,\mathrm{d}t$。

第一步（$\vec{\alpha}$）：由链式法则，

$$\vec{\alpha}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|},$$

即

$$\vec{\alpha}(t)=\frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}\qquad\Longleftrightarrow\qquad \vec{r}\,'=|\vec{r}\,'|\,\vec{\alpha}. \tag{$*$}$$

（这与前面” 单位切向量与曲率” 一节里对一般参数 t 给出的定义是一致的。）

第二步（分解 $\vec{r}\,''$）：对 $(*)$ 两边关于 t 求导，

$$\vec{r}\,''=\frac{\mathrm{d}|\vec{r}\,'|}{\mathrm{d}t}\vec{\alpha}+|\vec{r}\,'|\frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}|\vec{r}\,'|}{\mathrm{d}t}\vec{\alpha}+|\vec{r}\,'|\frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

注意 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}s}=\dot{\vec{\alpha}}=k\vec{\beta}$（由 $\vec{\beta}$ 的定义）及 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=|\vec{r}\,'|$，代入得

$$\vec{r}\,''=\frac{\mathrm{d}|\vec{r}\,'|}{\mathrm{d}t}\,\vec{\alpha}+k\,|\vec{r}\,'|^2\,\vec{\beta}. \tag{$**$}$$

这就是把加速度 $\vec{r}\,''$ 沿 Frenet 标架分解为切向分量（沿 $\vec{\alpha}$）与法向分量（沿 $\vec{\beta}$）。

第三步（k 与 $\vec{\gamma}$）：利用 $(*)$，把 $\vec{r}\,'=|\vec{r}\,'|\vec{\alpha}$ 代入 $\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''$，并用 $(**)$：

$$\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''=|\vec{r}\,'|\vec{\alpha}\times\left(\frac{\mathrm{d}|\vec{r}\,'|}{\mathrm{d}t}\vec{\alpha}+k|\vec{r}\,'|^2\vec{\beta}\right)=k|\vec{r}\,'|^3(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})=k|\vec{r}\,'|^3\vec{\gamma}$$

（因为 $\vec{\alpha}\times\vec{\alpha}=\vec{0}$，且 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{\gamma}$）。两边取模长，注意 $k\geq 0$、$|\vec{\gamma}|=1$，得到

$$\boxed{k(t)=\frac{|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}} \tag{$***$}$$

再代回上式，解出

$$\boxed{\vec{\gamma}(t)=\frac{\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''}{|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|}.}$$

第四步（$\vec{\beta}$）：由 $\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}=\vec{\beta}$，

$$\vec{\beta}(t)=\vec{\gamma}(t)\times\vec{\alpha}(t)=\frac{\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''}{|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|}\times\frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|}=\frac{(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'')\times\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|\,|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|}.$$

利用向量三重积恒等式 $(\vec{X}\times\vec{Y})\times\vec{Z}=\langle\vec{X},\vec{Z}\rangle\vec{Y}-\langle\vec{Y},\vec{Z}\rangle\vec{X}$（取 $\vec{X}=\vec{r}\,',\vec{Y}=\vec{r}\,'',\vec{Z}=\vec{r}\,'$），

$$(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'')\times\vec{r}\,'=\langle\vec{r}\,',\vec{r}\,'\rangle\vec{r}\,''-\langle\vec{r}\,'',\vec{r}\,'\rangle\vec{r}\,'=|\vec{r}\,'|^2\vec{r}\,''-\langle\vec{r}\,',\vec{r}\,''\rangle\vec{r}\,',$$

所以

$$\vec{\beta}(t)=\frac{|\vec{r}\,'|\,\vec{r}\,''}{|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|}-\frac{\langle\vec{r}\,',\vec{r}\,''\rangle\,\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|\,|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|}.$$

实用计算步骤：给定一般参数下的 $\vec{r}(t)$，依次：

(1) 计算 $\vec{r}\,',\vec{r}\,'',\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'',\langle\vec{r}\,',\vec{r}\,''\rangle,|\vec{r}\,'|,|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|$；

(2) 计算 $\vec{\alpha}(t)=\vec{r}\,'/|\vec{r}\,'|$，$k(t)=|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|/|\vec{r}\,'|^3$；

(3) 计算 $\vec{\gamma}(t)=\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''/|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|$；

(4) 计算 $\vec{\beta}(t)=\vec{\gamma}(t)\times\vec{\alpha}(t)$。

（注：计算挠率 $\tau(t)$ 还需要用到 $\vec{r}'''$，具体定义和公式将在后面挠率一节给出；下面例题末尾给出的 $\tau(t)$ 数值只是预先写出的结果，供对照。）

例 1：已知螺旋线 $C:\vec{r}=(a\cos t,a\sin t,bt)$，$a>0$，计算 C 上的 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 及 k。

解：可用两种方式计算：方式一，先计算 $s=S(t)$，把 C 换成以 s 为弧长参数的表示，再按弧长参数下的公式计算上述几何量，最后代回以 t 为参数的表达式；方式二，直接利用一般参数 t 下的上述计算公式。下面依次给出两种方式的计算。

方式一：因为 $|\vec{r}'(t)|=\sqrt{a^2+b^2}$ 是常数，记 $c:=\sqrt{a^2+b^2}$，由

$$S(t)=\int_0^t|\vec{r}'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau=ct,$$

可以显式解出 $t=t(s)=s/c$，从而把曲线换成以弧长 s 为参数的表示：

$$\vec{r}(s)=\Big(a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c},\ \frac{bs}{c}\Big).$$

这时就该按弧长参数下的公式 $\vec{\alpha}=\dot{\vec{r}},\ \vec{\beta}=\ddot{\vec{r}}/|\ddot{\vec{r}}|,\ k=|\ddot{\vec{r}}|,\ \vec{\gamma}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ 来算。先求一阶导：

$$\dot{\vec{r}}(s)=\Big(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\Big),$$

验证

$$|\dot{\vec{r}}(s)|=\sqrt{\frac{a^2}{c^2}\sin^2\frac{s}{c}+\frac{a^2}{c^2}\cos^2\frac{s}{c}+\frac{b^2}{c^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2}}=1,$$

确认 s 确实是弧长参数（否则前面换元就算错了）。再求二阶导：

$$\ddot{\vec{r}}(s)=\Big(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c},\ 0\Big),$$

从而

$$k(s)=|\ddot{\vec{r}}(s)|=\frac{a}{c^2}=\frac{a}{a^2+b^2},\qquad \vec{\beta}(s)=\frac{\ddot{\vec{r}}(s)}{k(s)}=\Big(-\cos\frac{s}{c},\ -\sin\frac{s}{c},\ 0\Big),$$

$$\vec{\gamma}(s)=\vec{\alpha}(s)\times\vec{\beta}(s)=\frac{1}{c}\Big(b\sin\frac{s}{c},\ -b\cos\frac{s}{c},\ a\Big).$$

最后把 $s=ct$（即 $s/c=t$）代回，得到

$$\vec{\alpha}(t)=\frac{1}{c}(-a\sin t,a\cos t,b),\qquad \vec{\beta}(t)=(-\cos t,-\sin t,0),$$

$$\vec{\gamma}(t)=\frac{1}{c}(b\sin t,-b\cos t,a),\qquad k(t)=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

方式二：首先，

$$\vec{r}'=(-a\sin t,a\cos t,b),\qquad |\vec{r}'|=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\vec{r}'' = (-a\cos t, -a\sin t, 0).$$

从而

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab\sin t,\ -ab\cos t,\ a^2),$$

$$|\vec{r}' \times \vec{r}''| = \sqrt{a^2b^2 + a^4} = a\sqrt{a^2+b^2} \qquad (a > 0).$$

于是

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b),$$

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|} = \frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}}(ab\sin t, -ab\cos t, a^2) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t, -b\cos t, a),$$

$$\vec{\beta}(t) = \vec{\gamma}(t) \times \vec{\alpha}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0),$$

$$k(t) = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

与方式一算出的结果完全一致（$k(t)$ 甚至与 t 无关，这也容易理解——螺旋线处处”长得一样”，曲率不应随 t 变化）。

（黑板上还顺带给出了这条螺旋线的挠率 $\tau(t) = \dfrac{b}{a^2+b^2}$）

隐式曲线上 Frenet 标架的计算（逐阶隐函数求导）

曲线有时是由方程组隐式给出的（例如两个曲面的交线），这时也可以不先把曲线化成显式参数方程，而是对约束方程逐阶关于弧长参数 s 求导，在给定点处直接解出 $\vec{r}'(0), \vec{r}''(0)$，从而算出该点处的 Frenet 标架。

例 2（*Viviani* 曲线）：设曲线 $C : \vec{r} = \vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$（$s$ 为弧长参数）满足方程组

$$(*) \qquad \begin{cases} x^2(s) + y^2(s) + z^2(s) = 1, \\ x^2(s) + y^2(s) = x(s), \end{cases}$$

即 C 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与圆柱面 $x^2+y^2=x$（即 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$）的交线（这条曲线通常称为 Viviani 曲线）。取 $P_0 = (0,0,1)$ 为 $s=0$ 处的起始点（容易验证 P_0 同时满足 $(*)$ 中两式）。求 C 在 P_0 处的 $k, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$。

解：可用两种方式计算：方式一，先把 C 显式参数化：令 $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t, y = \frac{1}{2}\sin t$ 满足圆柱方程，再由球面方程解出 $z = \pm\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t}$，代入前面”一般参数下”的公式计算；方式二，对约束方程逐阶隐函数求导。下面依次给出两种方式的计算。

方式一：圆柱方程 $x^2+y^2=x$ 即 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$，可以令

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t, \qquad y(t) = \frac{1}{2}\sin t,$$

代入球面方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 解出

$$z(t)=\pm\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t}=\pm\Big|\sin\frac{t}{2}\Big|$$

（最后一步用了半角公式 $1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}$）。$P_0=(0,0,1)$ 对应的参数：由 $x(t)=0$ 得 $\cos t=-1$，即 $t=\pi$；此时 $y(\pi)=\frac{1}{2}\sin\pi=0$，要让 $z(\pi)=1$ 就取正号分支，在 $t=\pi$ 附近 $\sin\frac{t}{2}>0$，所以（在 $t=\pi$ 附近）$z(t)=\sin\frac{t}{2}$。

对 $\vec{r}(t)=\big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t,\ \frac{1}{2}\sin t,\ \sin\frac{t}{2}\big)$ 求导：

$$\vec{r}\,'(t)=\Big(-\frac{1}{2}\sin t,\ \frac{1}{2}\cos t,\ \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\Big),\qquad \vec{r}\,''(t)=\Big(-\frac{1}{2}\cos t,\ -\frac{1}{2}\sin t,\ -\frac{1}{4}\sin\frac{t}{2}\Big).$$

代入 $t=\pi$：

$$\vec{r}\,'(\pi)=\Big(0,-\frac{1}{2},0\Big),\qquad \vec{r}\,''(\pi)=\Big(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{4}\Big).$$

再代入”一般参数下 Frenet 标架与曲率的计算公式”一节的公式：

$$|\vec{r}\,'(\pi)|=\frac{1}{2},\qquad \vec{r}\,'(\pi)\times\vec{r}\,''(\pi)=\Big(\frac{1}{8},0,\frac{1}{4}\Big),\qquad |\vec{r}\,'(\pi)\times\vec{r}\,''(\pi)|=\frac{\sqrt{5}}{8},$$

$$k(\pi)=\frac{|\vec{r}\,'(\pi)\times\vec{r}\,''(\pi)|}{|\vec{r}\,'(\pi)|^3}=\sqrt{5},\qquad \vec{\alpha}(\pi)=\frac{\vec{r}\,'(\pi)}{|\vec{r}\,'(\pi)|}=(0,-1,0),$$

$$\vec{\gamma}(\pi)=\frac{\vec{r}\,'(\pi)\times\vec{r}\,''(\pi)}{|\vec{r}\,'(\pi)\times\vec{r}\,''(\pi)|}=\Big(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\Big),\qquad \vec{\beta}(\pi)=\vec{\gamma}(\pi)\times\vec{\alpha}(\pi)=\Big(\frac{2}{\sqrt{5}},0,-\frac{1}{\sqrt{5}}\Big).$$

方式二：因为 s 是弧长参数，除方程组 $(*)$ 外还有

$$x^2(s)+y^2(s)+z^2(s)=1.\tag{♯}$$

第一步（求 $\vec{r}\,'(0)$）：对 $(*)$ 中两式分别关于 s 求导（注意 x,y,z 都是 s 的函数，要用链式法则）：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big[x^2+y^2+z^2\big]=2xx'+2yy'+2zz'=0\quad\Longrightarrow\quad xx'+yy'+zz'=0,\tag{$*_1'$}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big[x^2+y^2\big]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big[x\big]\quad\Longrightarrow\quad 2xx'+2yy'=x'\quad\Longleftrightarrow\quad (2x-1)x'+2yy'=0.\tag{$*_2'$}$$

现在把 $s=0$ 处的坐标 $(x(0),y(0),z(0))=(0,0,1)$ 代入，逐个解：

（a）**先解 $z'(0)$**：把 $(x,y,z)=(0,0,1)$ 代入 $(*_1')$，

$$0\cdot x'(0)+0\cdot y'(0)+1\cdot z'(0)=0\quad\Longrightarrow\quad z'(0)=0.$$

（b）**再解 $x'(0)$**：把 $(x,y)=(0,0)$ 代入 $(*_2')$，

$$(2\cdot 0-1)\,x'(0)+2\cdot 0\cdot y'(0)=0\quad\Longrightarrow\quad -x'(0)=0\quad\Longrightarrow\quad x'(0)=0.$$

（c）最后解 $y'(0)$：把刚得到的 $x'(0)=0, z'(0)=0$ 代入弧长条件 $(\sharp)$，

$$0^2+y'^2(0)+0^2=1 \quad\Longrightarrow\quad y'^2(0)=1 \quad\Longrightarrow\quad y'(0)=\pm 1.$$

不妨取 $y'(0)=1$（这相当于选定了曲线的方向），于是

$$\vec{r}\,'(0)=\big(x'(0),y'(0),z'(0)\big)=(0,1,0) \qquad \big(\text{即 } \vec{\alpha}(0)=(0,1,0)\big).$$

第二步（求 $\vec{r}\,''(0)$）：再分别对 $(*_1'),(*_2')$ 关于 s 求导一次（同样要留意每一项里哪些因子本身也是 s 的函数，要用乘积法则）：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big[xx'+yy'+zz'\big]=\big(x'^2+xx''\big)+\big(y'^2+yy''\big)+\big(z'^2+zz''\big)=0, \tag{$*_1''$}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big[2xx'+2yy'\big]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big[x'\big] \quad\Longrightarrow\quad 2x'^2+2xx''+2y'^2+2yy''=x''. \tag{$*_2''$}$$

同样把 $s=0$ 处的 $(x,y,z)=(0,0,1)$ 和刚求出的 $\vec{r}\,'(0)=(0,1,0)$（即 $x'(0)=0,y'(0)=1,z'(0)=0$）逐个代入：

（a）先解 $z''(0)$：代入 $(*_1'')$，

$$\underbrace{0^2}_{x'^2(0)}+\underbrace{0\cdot x''(0)}_{x(0)x''(0)}+\underbrace{1^2}_{y'^2(0)}+\underbrace{0\cdot y''(0)}_{y(0)y''(0)}+\underbrace{0^2}_{z'^2(0)}+\underbrace{1\cdot z''(0)}_{z(0)z''(0)}=0,$$

即 $1+z''(0)=0$，所以 $z''(0)=-1$。

（b）再解 $x''(0)$：代入 $(*_2'')$，

$$2\cdot 0^2+2\cdot 0\cdot x''(0)+2\cdot 1^2+2\cdot 0\cdot y''(0)=x''(0),$$

即 $2=x''(0)$，所以 $x''(0)=2$。

（c）还差 $y''(0)$：这里不必再对 $(*)$ 求导，而是用一个与这条曲线具体是什么无关的一般事实——$(\sharp)$ 两边对 s 求导：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big[x'^2+y'^2+z'^2\big]=2x'x''+2y'y''+2z'z''=0 \quad\Longrightarrow\quad x'x''+y'y''+z'z''=0. \tag{$\sharp'$}$$

这正是前面已经证过的 $\vec{\alpha}\perp\dot{\vec{\alpha}}$（即恒有 $\langle\vec{r}\,',\vec{r}\,''\rangle\equiv 0$）在这里的具体形式。代入 $\vec{r}\,'(0)=(0,1,0)$：

$$0\cdot x''(0)+1\cdot y''(0)+0\cdot z''(0)=0 \quad\Longrightarrow\quad y''(0)=0.$$

综上，

$$\vec{r}\,''(0)=(2,0,-1), \qquad |\vec{r}\,''(0)|=\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{5}.$$

第三步（算 $k,\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$）：因为 s 是弧长参数，$\vec{\alpha}(s)=\vec{r}\,'(s)$，$\vec{\beta}(s)=\vec{r}\,''(s)/|\vec{r}\,''(s)|$，$k(s)=|\vec{r}\,''(s)|$，$\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$，所以

$$\vec{\alpha}(0)=(0,1,0), \qquad k(0)=\sqrt{5},$$

$$\vec{\beta}(0)=\frac{\vec{r}''(0)}{|\vec{r}''(0)|}=\Big(\frac{2}{\sqrt{5}},\,0,\,-\frac{1}{\sqrt{5}}\Big),$$

$$\vec{\gamma}(0)=\vec{\alpha}(0)\times\vec{\beta}(0)=\frac{\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)}{|\vec{r}''(0)|}=\Big(-\frac{1}{\sqrt{5}},\,0,\,-\frac{2}{\sqrt{5}}\Big).$$

对照一下：这里（方式二）算出的 $k(0)=\sqrt{5}$ 和 $\vec{\beta}(0)=(2/\sqrt{5},0,-1/\sqrt{5})$ 跟前面方式一算出的 $k(\pi),\vec{\beta}(\pi)$ 完全一致；但 $\vec{\alpha}(0)=(0,1,0)$、$\vec{\gamma}(0)=(-1/\sqrt{5},0,-2/\sqrt{5})$ 恰好是前面方式一算出的 $\vec{\alpha}(\pi),\vec{\gamma}(\pi)$ 的相反数。这并不是算错了：这里解 (♯) 时 $y'(0)=\pm1$ 是”不妨取 $+1$”，这是一次任意的定向选择；而方式一中显式参数化里 t 增大的方向，沿曲线走的恰好是相反的方向。这个符号差正体现了一个一般事实——曲率 k 和主法向量 $\vec{\beta}$ 不依赖于曲线定向的选取，而切向量 $\vec{\alpha}$ 和副法向量 $\vec{\gamma}$ 在反转定向时都变号，这与前面”参数变换与曲线的等价” 一节里” 有向正则曲线” 的讨论是吻合的。

2.4 曲线挠率及 Frenet 公式

除了曲率 $k(s)$ 之外，曲线在每一点处还有另一个刻画其” 扭转程度” 的几何量——**挠率**。直观上，如果曲线始终待在同一个平面内（即平面曲线），这个量应当恒为零；一旦曲线开始” 离开” 这个平面向空间中扭转，它就不再为零。

设 $C:\vec{r}=\vec{r}(s)$（s 为弧长参数）为正则曲线，$\{\vec{\alpha}(s),\vec{\beta}(s),\vec{\gamma}(s)\}$ 为其 Frenet 标架，$k(s)$ 为曲率，满足 $\dot{\vec{\alpha}}=k\vec{\beta}$。

考虑副法向量 $\vec{\gamma}(s)=\vec{\alpha}(s)\times\vec{\beta}(s)$。一方面，因为 $|\vec{\gamma}(s)|\equiv1$，两边对 s 求导得 $\dot{\vec{\gamma}}\cdot\vec{\gamma}\equiv0$，即

$$\dot{\vec{\gamma}}\perp\vec{\gamma}.$$

另一方面，对 $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ 两边求导，并代入 $\dot{\vec{\alpha}}=k\vec{\beta}$：

$$\dot{\vec{\gamma}}=\dot{\vec{\alpha}}\times\vec{\beta}+\vec{\alpha}\times\dot{\vec{\beta}}=(k\vec{\beta})\times\vec{\beta}+\vec{\alpha}\times\dot{\vec{\beta}}=\vec{\alpha}\times\dot{\vec{\beta}}$$

（这里用了 $\vec{\beta}\times\vec{\beta}=\vec{0}$）。因为任意向量与 $\vec{\alpha}$ 的叉积都与 $\vec{\alpha}$ 垂直，这说明

$$\dot{\vec{\gamma}}\perp\vec{\alpha}.$$

而 $\{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基，一个既垂直于 $\vec{\alpha}$ 又垂直于 $\vec{\gamma}$ 的向量必定与 $\vec{\beta}$ 平行。于是存在数量函数 $\tau=\tau(s)$，使得

$$\boxed{\dot{\vec{\gamma}}(s)=-\tau(s)\,\vec{\beta}(s)}$$

（负号只是习惯上的约定）。特别地，$\tau(s)\equiv0$ 当且仅当 $\dot{\vec{\gamma}}(s)\equiv\vec{0}$。

在上式两边与 $\vec{\beta}$ 作内积，并利用 $\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}=1$，就得到挠率的计算公式：定义

$$\tau(s):=-\dot{\vec{\gamma}}(s)\cdot\vec{\beta}(s)$$

为曲线 C 在 s 处的**挠率**。

命题：设 C 为正则曲线，且 C 不是（一段）直线，则 C 是平面曲线（即整条曲线都落在空间中某个平面内）当且仅当 $\tau(s)\equiv 0$。

证明：（必要性，$\Rightarrow$）设 C 落在平面 Σ 内，记 $\vec{n}$ 为 Σ 的（单位）法向量。取 Σ 上任一固定点 $\vec{x}_0$，则 C 上的点满足方程

$$(\vec{r}(s)-\vec{x}_0)\cdot\vec{n}=0.$$

两边关于 s 求导，得

$$\vec{r}\,'(s)\cdot\vec{n}=\vec{\alpha}(s)\cdot\vec{n}=0. \tag{1}$$

再求一次导，并代入 $\dot{\vec{\alpha}}=k\vec{\beta}$，得

$$k(s)\,\vec{\beta}(s)\cdot\vec{n}=0.$$

因为 C 不是直线，$k(s)\neq 0$，于是

$$\vec{\beta}(s)\cdot\vec{n}=0. \tag{2}$$

由 (1)(2)，$\vec{n}$ 同时垂直于 $\vec{\alpha}(s)$ 和 $\vec{\beta}(s)$，而 $\{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\}$ 是标准正交基，所以 $\vec{n}$ 必与 $\vec{\gamma}(s)$ 平行，即 $\vec{\gamma}(s)=\pm\vec{n}$。又 $\vec{\gamma}(s)$ 关于 s 连续，不能在 $+\vec{n}$ 与 $-\vec{n}$ 之间跳变，所以符号必须自始至终取同一个，即 $\vec{\gamma}(s)$ 恒等于 $\vec{n}$ 或恒等于 $-\vec{n}$——无论哪种情形，$\vec{\gamma}(s)$ 都是一个常向量，从而 $\dot{\vec{\gamma}}(s)\equiv\vec{0}$，所以 $\tau(s)=-\dot{\vec{\gamma}}(s)\cdot\vec{\beta}(s)\equiv 0$。

（这一步也可以从密切平面的角度直观理解：曲线在每一点处的密切平面都是由 $\vec{\alpha}(s),\vec{\beta}(s)$ 张成的平面；如果曲线恒在 Σ 内，这个密切平面就应当恒与 Σ 重合，从而其法向量 $\vec{\gamma}(s)$ 必须恒与 Σ 的法向量 $\vec{n}$ 平行——这与上面逐点求导得到的结论是一致的。）

（充分性，$\Leftarrow$）反之，设 $\tau(s)\equiv 0$。由前面 $\dot{\vec{\gamma}}=-\tau\vec{\beta}$ 知 $\dot{\vec{\gamma}}(s)\equiv\vec{0}$，所以 $\vec{\gamma}(s)$ 恒等于某个常向量，记为 $\vec{n}_0$。任取 C 上一点 $\vec{r}(s_0)$，下面证明 C 落在经过 $\vec{r}(s_0)$、以 $\vec{n}_0$ 为法向量的平面内，即证明

$$(\vec{r}(s)-\vec{r}(s_0))\cdot\vec{n}_0\equiv 0.$$

当 $s=s_0$ 时上式两项都是零，显然成立。再看这个表达式关于 s 的导数：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big[(\vec{r}(s)-\vec{r}(s_0))\cdot\vec{n}_0\Big]=\vec{r}\,'(s)\cdot\vec{n}_0=\vec{\alpha}(s)\cdot\vec{n}_0=\vec{\alpha}(s)\cdot\vec{\gamma}(s)=0$$

（这里用了 $\vec{n}_0=\vec{\gamma}(s)$，以及标准正交标架中恒有 $\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}$）。即 $(\vec{r}(s)-\vec{r}(s_0))\cdot\vec{n}_0$ 作为 s 的函数，导数恒为零，且在 $s=s_0$ 处取值为零，所以它恒等于零。这说明 C 上所有点都满足 $(\vec{r}(s)-\vec{r}(s_0))\cdot\vec{n}_0=0$，即 C 落在这张平面内。■

Frenet 公式

把曲线嵌入到标准正交标架的语言中看：在每一点 s 处配上一个随 s 连续变化的标准正交标架 $\{\vec{r}(s);\vec{\alpha}(s),\vec{\beta}(s),\vec{\gamma}(s)\}$，就得到一条 $s\mapsto\{\vec{\alpha}(s),\vec{\beta}(s),\vec{\gamma}(s)\}$ 的 Frenet 标架；它关于 s 的变化满足一组一阶常微分方程（ODEs），这组方程就称为**Frenet 公式**。

目前已经得到了其中两条：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}s}=k\vec{\beta},\qquad\frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}}{\mathrm{d}s}=-\tau\vec{\beta},$$

还差 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\beta}}{\mathrm{d}s}$ 没有算出来。利用标准正交右手标架中的循环关系 $\vec{\beta}=\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}$（这是 $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ 的另一种写法），两边关于 s 求导：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\beta}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha})=\frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}}{\mathrm{d}s}\times\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\times\frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}s}=(-\tau\vec{\beta})\times\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\times(k\vec{\beta}).$$

再利用 $\vec{\beta}\times\vec{\alpha}=-\vec{\gamma}$（即 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ 两边反号）以及 $\vec{\gamma}\times\vec{\beta}=-\vec{\alpha}$（即 $\vec{\beta}\times\vec{\gamma}=\vec{\alpha}$ 两边反号），上式化简为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\beta}}{\mathrm{d}s}=(-\tau)(-\vec{\gamma})+k(-\vec{\alpha})=-k\vec{\alpha}+\tau\vec{\gamma}.$$

于是三条公式可以统一写成矩阵形式：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\\ \vec{\beta}\\ \vec{\gamma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&k&0\\ -k&0&\tau\\ 0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\\ \vec{\beta}\\ \vec{\gamma}\end{pmatrix}}$$

这就是著名的**Frenet 公式**（Frenet–Serret 公式）。系数矩阵是一个反对称矩阵（主对角线为零，且关于主对角线反号）——这并非巧合：$\{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\}$ 处处标准正交，求导后的系数矩阵必须保持这个反对称结构，否则标架就无法一直保持标准正交。

（这组公式的每一步推导都值得仔细过一遍：它把曲线的全部局部几何信息——曲率 $k(s)$ 和挠率 $\tau(s)$——浓缩成了标架 $\{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\}$ 所满足的一个线性常微分方程组，这也是后面”曲线的基本定理”（由 $k(s),\tau(s)$ 唯一确定曲线）的出发点。）

球面上正则曲线关于 k,τ 的关系式

利用刚得到的 Frenet 公式，可以推出：如果一条正则曲线落在某个球面上，它的曲率 k 与挠率 τ 之间必须满足一个固定的关系式。

命题：设正则曲线 $C:\vec{r}=\vec{r}(s)$（s 为弧长参数）位于 E^3 中某个半径为 R 的球面上，且其曲率 $k(s)$、挠率 $\tau(s)$ 处处不为零，则

$$\frac{1}{k(s)^2}+\left(\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{k(s)}\right)^2=R^2.$$

证明：设球心为 $\vec{r}_0$。由 C 落在这个球面上知，沿 C 恒有

$$|\vec{r}(s)-\vec{r}_0|^2=R^2.$$

两边关于 s 求导，并利用 $\vec{r}\,'(s)=\vec{\alpha}(s)$：

$$\vec{\alpha}(s)\cdot(\vec{r}(s)-\vec{r}_0)=0,$$

这说明 $\vec{r}(s)-\vec{r}_0$ 与 $\vec{\alpha}(s)$ 处处垂直，从而它必落在由 $\vec{\beta}(s),\vec{\gamma}(s)$ 张成的（法）平面内，即存在待定的一元函数 $\lambda(s),\mu(s)$，使得

$$\vec{r}(s)-\vec{r}_0=\lambda(s)\vec{\beta}(s)+\mu(s)\vec{\gamma}(s).$$

两边再次关于 s 求导：左边等于 $\vec{r}\,'(s)=\vec{\alpha}(s)$；右边利用 Frenet 公式 $\dot{\vec{\beta}}=-k\vec{\alpha}+\tau\vec{\gamma}$、$\dot{\vec{\gamma}}=-\tau\vec{\beta}$，得

$$\vec{\alpha}(s)=\dot\lambda\,\vec{\beta}+\lambda(-k\vec{\alpha}+\tau\vec{\gamma})+\dot\mu\,\vec{\gamma}+\mu(-\tau\vec{\beta})=-\lambda k\,\vec{\alpha}+(\dot\lambda-\mu\tau)\,\vec{\beta}+(\lambda\tau+\dot\mu)\,\vec{\gamma}.$$

因为 $\{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\}$ 是标准正交基，两边按 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 的分量分别对比，得到

$$\begin{cases}1=-\lambda k,\\ 0=\dot\lambda-\mu\tau,\\ 0=\lambda\tau+\dot\mu,\end{cases}\qquad\text{即}\qquad\begin{cases}\lambda=-\dfrac{1}{k},\\ \mu=\dfrac{1}{\tau}\dot\lambda=-\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\dfrac{1}{k},\\ \dot\mu=-\lambda\tau=\dfrac{\tau}{k}\end{cases}$$

（第三条关系式是 λ,μ 必须满足的一个自洽条件，推出最终结论用不到它，但在下面提到的习题里会用到。）

把 λ,μ 代回 $\vec{r}(s)-\vec{r}_0=\lambda\vec{\beta}+\mu\vec{\gamma}$，得到

$$\vec{r}(s)-\vec{r}_0=-\frac{1}{k}\,\vec{\beta}(s)-\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(\frac{1}{k}\Big)\vec{\gamma}(s).$$

因为 $\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 是单位正交向量，两边取模长的平方，并利用 $R=|\vec{r}(s)-\vec{r}_0|$，就得到

$$R^2=\lambda^2+\mu^2=\frac{1}{k(s)^2}+\left(\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{k(s)}\right)^2.\qquad\blacksquare$$

（反过来，上述结论的逆命题也成立：如果一条曲率处处不为零、挠率处处不为零、且曲率不是常数的正则曲线满足

$$\left(\frac{1}{k(s)}\right)^2+\left(\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{k(s)}\right)^2=\text{常数},$$

那么它必然落在某个半径为该常数平方根的球面上。这是课本上的一道习题（习题 4），下面给出证明。）

证明（习题 4）：按老师的提示，考虑向量值函数（这正是上一个证明里 $\vec{r}_0=\vec{r}-\lambda\vec{\beta}-\mu\vec{\gamma}$ 所对应的“候选球心”）。设 $C:\vec{r}=\vec{r}(s)$（s 为弧长参数）是一条曲率 $k\neq 0$、挠率 $\tau\neq 0$ 处处成立、且 k 不是常数的正则曲线，满足假设 $\dfrac{1}{k^2}+\left(\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\dfrac{1}{k}\right)^2=R^2$（$R>0$ 为常数）。记

$$p(s):=\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{k(s)}\qquad\left(\text{即 }\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{k}=\tau p\right),$$

并令

$$\vec{c}(s):=\vec{r}(s)+\frac{1}{k}\,\vec{\beta}(s)+p(s)\,\vec{\gamma}(s).$$

对 s 求导，并用 $\dot{\vec{r}}=\vec{\alpha}$ 及 Frenet 公式 $\dot{\vec{\beta}}=-k\vec{\alpha}+\tau\vec{\gamma}$、$\dot{\vec{\gamma}}=-\tau\vec{\beta}$：

$$\dot{\vec{c}}=\vec{\alpha}+\left(\frac{1}{k}\right)^{\cdot}\vec{\beta}+\frac{1}{k}(-k\vec{\alpha}+\tau\vec{\gamma})+\dot{p}\,\vec{\gamma}+p(-\tau\vec{\beta})=\left[\left(\frac{1}{k}\right)^{\cdot}-\tau p\right]\vec{\beta}+\left(\frac{\tau}{k}+\dot{p}\right)\vec{\gamma}.$$

由 p 的定义，$\vec{\beta}$ 的系数为零，所以

$$\dot{\vec{c}}(s)=\left(\frac{\tau}{k}+\dot{p}\right)\vec{\gamma}(s).\tag{$\dagger$}$$

只要证明 $\dfrac{\tau}{k}+\dot{p}\equiv 0$。把假设 $\dfrac{1}{k^2}+p^2=R^2$ 两边对 s 求导：

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}\right)^{\cdot}+p\dot{p}=0,$$

代入 $\left(\frac{1}{k}\right)^{\cdot}=\tau p$，得

$$p\left(\frac{\tau}{k}+\dot{p}\right)=0.$$

于是在 $p\neq 0$ 的点处有 $\dfrac{\tau}{k}+\dot{p}=0$。再说明这在所有点处都成立：若 p 在某个开区间上恒为零，则 $\left(\frac{1}{k}\right)^{\cdot}=\tau p\equiv 0$，$k$ 在该区间上是常数，与 k 不是常数的假设矛盾；所以 p 的零点都是孤立点，$\{p\neq 0\}$ 在实轴上稠密。而 $\dfrac{\tau}{k}+\dot{p}$ 是连续函数，在稠密集上为零就处处为零。

因此由 ($\dagger$)，$\dot{\vec{c}}\equiv\vec{0}$，即 $\vec{c}(s)$ 是常向量，记为 $\vec{r}_0$。于是

$$\vec{r}(s)-\vec{r}_0=-\frac{1}{k}\,\vec{\beta}(s)-p(s)\,\vec{\gamma}(s),$$

两边取模长的平方，利用 $\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 单位正交以及假设：

$$|\vec{r}(s)-\vec{r}_0|^2=\frac{1}{k^2}+p^2=R^2.$$

这说明 C 上每一点到定点 $\vec{r}_0$ 的距离都恒为 R，即 C 落在以 $\vec{r}_0$ 为球心、R 为半径的球面上。■

一般参数下挠率 $\tau(t)$ 的计算公式

前面”一般参数下 Frenet 标架与曲率的计算公式”一节只给出了 $\vec{\alpha}(t),\vec{\beta}(t),\vec{\gamma}(t),k(t)$ 的计算公式，当时提到计算挠率 $\tau(t)$ 还需要用到 $\vec{r}'''(t)$，具体公式留到这里补上。

记 $\vec{N}(t):=\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)$（即 $\vec{\gamma}(t)=\vec{N}(t)/|\vec{N}(t)|$），先计算 $\vec{N}$ 关于 t 的导数：

$$\dot{\vec{N}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}'\times\vec{r}'')=\vec{r}''\times\vec{r}''+\vec{r}'\times\vec{r}'''=\vec{r}'\times\vec{r}'''$$

（用了 $\vec{r}''\times\vec{r}''=\vec{0}$）。由商法则，

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}\Big)=\frac{1}{|\vec{N}|}\Big(\dot{\vec{N}}-\vec{\gamma}\,\frac{\mathrm{d}|\vec{N}|}{\mathrm{d}t}\Big).$$

两边与 $\vec{\beta}$ 作内积，注意到 $\vec{\gamma}\perp\vec{\beta}$，含 $\mathrm{d}|\vec{N}|/\mathrm{d}t$ 的那一项消失：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{|\vec{N}|}\,\dot{\vec{N}}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{|\vec{N}|}(\vec{r}'\times\vec{r}''')\cdot\vec{\beta}.$$

再利用 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}s=1/|\vec{r}'|$ 和挠率的定义 $\tau=-\dfrac{\mathrm{d}\vec{\gamma}}{\mathrm{d}s}\cdot\vec{\beta}=-\dfrac{\mathrm{d}\vec{\gamma}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\cdot\vec{\beta}$，得到

$$\tau(t)=-\frac{1}{|\vec{r}'|\,|\vec{N}|}(\vec{r}'\times\vec{r}''')\cdot\vec{\beta}.$$

代入 $\vec{\beta}=\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}=\dfrac{\vec{N}\times\vec{r}'}{|\vec{N}|\,|\vec{r}'|}$，并利用向量恒等式 $(\vec{X}\times\vec{Y})\cdot(\vec{V}\times\vec{W})=\langle\vec{X},\vec{V}\rangle\langle\vec{Y},\vec{W}\rangle-\langle\vec{X},\vec{W}\rangle\langle\vec{Y},\vec{V}\rangle$（取 $\vec{X}=\vec{r}',\vec{Y}=\vec{r}''',\vec{V}=\vec{N},\vec{W}=\vec{r}'$）：

$$(\vec{r}'\times\vec{r}''')\cdot(\vec{N}\times\vec{r}')=\langle\vec{r}',\vec{N}\rangle\langle\vec{r}''',\vec{r}'\rangle-\langle\vec{r}',\vec{r}'\rangle\langle\vec{r}''',\vec{N}\rangle.$$

注意 $\langle\vec{r}',\vec{N}\rangle=\vec{r}'\cdot(\vec{r}'\times\vec{r}'')=0$（因为 $\vec{r}'\perp\vec{r}'\times\vec{r}''$），所以上式只剩第二项：

$$(\vec{r}'\times\vec{r}''')\cdot(\vec{N}\times\vec{r}')=-|\vec{r}'|^2\big(\vec{r}'''\cdot\vec{N}\big)=-|\vec{r}'|^2\,(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}'''),$$

这里 $(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}'''):=\vec{r}'''\cdot(\vec{r}'\times\vec{r}'')=\det(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')$ 是三个向量的**标量三重积**（也就是以它们为行/列排成的行列式）。于是

$$(\vec{r}'\times\vec{r}''')\cdot\vec{\beta}=\frac{(\vec{r}'\times\vec{r}''')\cdot(\vec{N}\times\vec{r}')}{|\vec{N}|\,|\vec{r}'|}=\frac{-|\vec{r}'|^2(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')}{|\vec{N}|\,|\vec{r}'|}=-\frac{|\vec{r}'|\,(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')}{|\vec{N}|}.$$

代回 $\tau(t)$ 的表达式：

$$\tau(t)=-\frac{1}{|\vec{r}'|\,|\vec{N}|}\cdot\Big(-\frac{|\vec{r}'|\,(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')}{|\vec{N}|}\Big)=\frac{(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')}{|\vec{N}|^2},$$

即

$$\boxed{\tau(t)=\frac{(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')}{|\vec{r}'\times\vec{r}''|^2}}$$

（分母处处非零，因为已经假设了曲率 $k(t)\neq 0$，即 $\vec{r}'\times\vec{r}''\neq\vec{0}$）。特别地，当 $t=s$ 为弧长参数时，$\vec{r}'(s)=\vec{\alpha}(s)$、$\vec{r}''(s)=k(s)\vec{\beta}(s)$，从而 $|\vec{r}'\times\vec{r}''|=k(s)|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|=k(s)$，于是公式退化为 $\tau(s)=(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')/k(s)^2$。

（用这个公式可以反过来验证例 1 里黑板上预先给出的挠率数值：对螺旋线 $\vec{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$ 直接代入计算，得到 $\tau(t)\equiv b/(a^2+b^2)$，与之前的数值完全一致。）

平面曲线的行列式判别法

利用上面的公式，可以把” 曲线是否为平面曲线” 这件事转化成一个纯粹的行列式计算。

命题：设 $C:\vec{r}=\vec{r}(t)$ 为空间正则参数曲线，则 C 是平面曲线当且仅当恒有

$$(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')\equiv 0.$$

证明：先看退化情形：若 C 是一条直线（段），则 $\vec{r}''(t)\equiv\vec{0}$（见” 曲率恒为零：直线情形” 一节），从而三重积 $(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')\equiv 0$ 自动成立；而直线本身显然是（退化的）平面曲线，所以这种情形下等价性两边都成立。

再看 C 不是直线的情形，此时 $k(t)\neq 0$ 处处成立。由前面的命题（C 是平面曲线当且仅当挠率 τ 恒为零）和刚得到的公式 $\tau(t)=(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')/|\vec{r}'\times\vec{r}''|^2$（这里分母恒不为零），立即有

$$\tau(t)\equiv 0\iff(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')\equiv 0.$$

再结合 C 是平面曲线 $\iff\tau(t)\equiv 0$，就得到 C 是平面曲线 $\iff(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')\equiv 0$。

综合两种情形，命题成立。■

弧长参数 s 与一般参数 t 下的公式对照表

把 2.3、2.4 两节得到的几何量公式汇总在一起：左列是弧长参数 s 下的定义式（$\dot{}$ 表示对 s 求导），右列是一般参数 t 下的计算公式（$'$ 表示对 t 求导）。假设曲线正则，且 $k\neq 0$。

	弧长参数 s	一般参数 t
参数关系	$\lvert\dot{\vec{r}}(s)\rvert \equiv 1$	$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \lvert\vec{r}\,'(t)\rvert$
切向量 $\vec{\alpha}$	$\dot{\vec{r}}$	$\dfrac{\vec{r}\,'}{\lvert\vec{r}\,'\rvert}$
曲率 k	$\lvert\dot{\vec{\alpha}}\rvert = \lvert\ddot{\vec{r}}\rvert$	$\dfrac{\lvert\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'''\rvert}{\lvert\vec{r}\,'\rvert^3}$
副法向量 $\vec{\gamma}$	$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \dfrac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{\lvert\ddot{\vec{r}}\rvert}$	$\dfrac{\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''}{\lvert\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'''\rvert}$
主法向量 $\vec{\beta}$	$\dfrac{\dot{\vec{\alpha}}}{k} = \dfrac{\ddot{\vec{r}}}{\lvert\ddot{\vec{r}}\rvert}$	$\vec{\gamma} \times \vec{\alpha} = \dfrac{(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'') \times \vec{r}\,'}{\lvert\vec{r}\,'\rvert\,\lvert\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'''\rvert}$
挠率 τ	$-\dot{\vec{\gamma}} \cdot \vec{\beta} = \dfrac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})}{k^2}$	$\dfrac{(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''')}{\lvert\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''\rvert^2}$
Frenet 公式	$\dot{\vec{\alpha}} = k\vec{\beta}$	$\vec{\alpha}\,' = \lvert\vec{r}\,'\rvert\, k\vec{\beta}$
	$\dot{\vec{\beta}} = -k\vec{\alpha} + \tau\vec{\gamma}$	$\vec{\beta}\,' = \lvert\vec{r}\,'\rvert(-k\vec{\alpha} + \tau\vec{\gamma})$
	$\dot{\vec{\gamma}} = -\tau\vec{\beta}$	$\vec{\gamma}\,' = -\lvert\vec{r}\,'\rvert\,\tau\vec{\beta}$
平面曲线判别	$\tau \equiv 0$	$(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''') \equiv 0$

两列之间的桥梁就是链式法则：对任一量 f，$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \lvert\vec{r}\,'\rvert\,\dot{f}$。右列 Frenet 公式即由左列每个式子两边乘以 $\lvert\vec{r}\,'\rvert$ 得到；而 s 为弧长参数时 $\lvert\vec{r}\,'\rvert \equiv 1$，右列就退化为左列。表中 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ 表示标量三重积。

2.5 曲线分类定理

前两节我们看到，空间曲线的弯曲与扭转由曲率 k 与挠率 τ 这两个量刻画。本节回答两个自然的问题：

(1) 如果两条曲线的 $k(s)$、$\tau(s)$ 作为弧长 s 的函数完全相同，它们是否一定“同一形状”（至多差一个刚体运动）？

(2) 反过来，任意给定两个函数 $k(s)>0$、$\tau(s)$，是否一定存在一条曲线，以它们为曲率和挠率？

这两个问题的肯定回答就是下面的两个定理，合称**曲线论基本定理**：定理 5.1（唯一性定理）与定理 5.2（存在性定理）。合起来看，它们说明：曲率为正的空间曲线在刚体运动的意义下，恰好被函数对 $(k(s),\tau(s))$ 唯一确定——这就是本节取名“曲线分类定理”的原因。（老师在板书上把定理 5.1、5.2 的证明标注为基本要求。）

先回忆 Frenet 公式。设 $C:\vec{r}=\vec{r}(s)$ 是 E^3 中的正则参数曲线，s 为弧长参数，且 $k(s)\neq 0$ 处处成立（本节总取 $k(s)>0$），则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\\ \vec{\beta}\\ \vec{\gamma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\\ \vec{\beta}\\ \vec{\gamma}\end{pmatrix},$$

其中 $\{\vec{r}(s);\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\}$ 是 C 在 s 处的 Frenet 标架。

刚体运动下的 Frenet 标架

证明唯一性定理需要先知道：曲线经过刚体运动后，弧长参数、曲率、挠率都不变，Frenet 标架也随之被同一个运动搬走。

设 σ 是 E^3 中的刚体运动，写成 $\sigma(\vec{x})=\vec{b}+T\vec{x}$，其中 $\vec{b}\in\mathbb{R}^3$，$T\in SO(3)$ 是保持内积且行列式为 1 的线性变换（这是第一章中刚体运动的转动部分；第一章里坐标写成行向量 $\vec{a}+(x,y,z)A$，这里的 T 相当于 A^{T} 作用在列向量上，下面只用到 T 保持内积、保持定向这两条性质）。

命题：设 $C:\vec{r}=\vec{r}(s)$ 是曲率 $k(s)>0$、挠率 $\tau(s)$ 的曲线，s 为弧长参数，Frenet 标架为 $\{\vec{r};\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\}$。则 $\tilde{C}=\sigma(C):\tilde{\vec{r}}(s)=\sigma(\vec{r}(s))$ 仍以 s 为弧长参数，曲率、挠率仍为 $k(s)$、$\tau(s)$，且其 Frenet 标架为 $\{\tilde{\vec{r}};T\vec{\alpha},T\vec{\beta},T\vec{\gamma}\}$。

证明：因为 T 是线性的，$\tilde{\vec{r}}(s)=\vec{b}+T\vec{r}(s)$ 关于 s 求导得

$$\tilde{\vec{r}}'(s)=T\vec{r}'(s)=T\vec{\alpha}(s).$$

T 保持内积，故 $|T\vec{\alpha}|=|\vec{\alpha}|=1$，由 Th 2.1，$s$ 仍是 $\tilde{C}$ 的弧长参数，并且 $\tilde{\vec{\alpha}}=T\vec{\alpha}$。再求导，

$$\dot{\tilde{\vec{\alpha}}}=T\dot{\vec{\alpha}}=kT\vec{\beta},\qquad |T\vec{\beta}|=1,$$

所以 $\tilde{C}$ 的曲率 $\tilde{k}=|\dot{\tilde{\vec{\alpha}}}|=k$，主法向量 $\tilde{\vec{\beta}}=\dot{\tilde{\vec{\alpha}}}/\tilde{k}=T\vec{\beta}$。副法向量

$$\tilde{\vec{\gamma}}=\tilde{\vec{\alpha}}\times\tilde{\vec{\beta}}=T\vec{\alpha}\times T\vec{\beta}=T(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})=T\vec{\gamma},$$

其中第三个等号用到 $T\in SO(3)$：对任意向量 $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$，

$$(T\vec{u}\times T\vec{v})\cdot T\vec{w}=\det(T\vec{u},T\vec{v},T\vec{w})=\det T\cdot\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=T(\vec{u}\times\vec{v})\cdot T\vec{w},$$

而 T 是满射，所以 $T\vec{u}\times T\vec{v}=T(\vec{u}\times\vec{v})$。（若 $\det T=-1$，上式中间会多出一个负号，$\tilde{\vec{\gamma}}=-T\vec{\gamma}$，挠率也会变号，所以这里只能用保持定向的刚体运动。）最后

$$\dot{\tilde{\vec{\gamma}}}=T\dot{\vec{\gamma}}=-\tau T\vec{\beta}=-\tau\tilde{\vec{\beta}},$$

于是 $\tilde{\tau}=-\dot{\tilde{\vec{\gamma}}}\cdot\tilde{\vec{\beta}}=\tau\,|\tilde{\vec{\beta}}|^2=\tau$。■

定理 5.1（唯一性定理）

定理 5.1：设 C_1 与 C_2 是 E^3 中两条正则曲线，它们的曲率处处非零。设 $C_1:\vec{r}=\vec{r}_1(s)$，$C_2:\vec{r}=\vec{r}_2(s)$，其中 s 为它们的弧长参数（弧长参数可以平移，故不妨设二者定义在同一个区间 I 上，且 $0\in I$）。如果

1) $k_1(s)=k_2(s)>0$，

2) $\tau_1(s)=\tau_2(s)$，$\forall s\in I$，

则必存在 E^3 中的一个刚体运动 σ，满足 $\sigma(C_1)=C_2$（更准确地说，$\sigma(\vec{r}_1(s))=\vec{r}_2(s)$，$\forall s\in I$）。

证明：

第一步（把 $s=0$ 处的 Frenet 标架对齐）。记 $\{\vec{r}_1(0);\vec{\alpha}_1(0),\vec{\beta}_1(0),\vec{\gamma}_1(0)\}$ 与 $\{\vec{r}_2(0);\vec{\alpha}_2(0),\vec{\beta}_2(0),\vec{\gamma}_2(0)\}$ 为两条曲线在 $s=0$ 处的 Frenet 标架，它们都是 E^3 中的笛卡尔标架（单位正交且 $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ 满足右手法则）。由第一章定理 1.1，存在 E^3 中的刚体运动 σ，把前一个标架搬到后一个标架。具体地，取线性变换 T 使得

$$T\vec{\alpha}_1(0)=\vec{\alpha}_2(0),\quad T\vec{\beta}_1(0)=\vec{\beta}_2(0),\quad T\vec{\gamma}_1(0)=\vec{\gamma}_2(0),$$

（这是良定义的，因为 $\{\vec{\alpha}_1(0),\vec{\beta}_1(0),\vec{\gamma}_1(0)\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基）。T 把一组单位正交基映成另一组单位正交基，所以保持内积；又

$$\det(T\vec{\alpha}_1,T\vec{\beta}_1,T\vec{\gamma}_1)=\det T\cdot\det(\vec{\alpha}_1,\vec{\beta}_1,\vec{\gamma}_1),$$

两个标架都是右手系，左右两个三重积都等于 1，所以 $\det T=1$，即 $T\in SO(3)$。令

$$\sigma(\vec{x})=\vec{r}_2(0)+T\big(\vec{x}-\vec{r}_1(0)\big),$$

则 $\sigma(\vec{r}_1(0))=\vec{r}_2(0)$。

由上一小节的命题，$\sigma(C_1)$ 仍以 s 为弧长参数，曲率、挠率仍是 $k_1(s)$、$\tau_1(s)$，Frenet 标架为 $\{\sigma(\vec{r}_1);T\vec{\alpha}_1,T\vec{\beta}_1,T\vec{\gamma}_1\}$。不妨仍把 $\sigma(C_1)$（连同它的 $\vec{r}_1,\vec{\alpha}_1,\vec{\beta}_1,\vec{\gamma}_1$）记作 C_1，这样 C_1 与 C_2 在 $s=0$ 处重合且具有相同的 Frenet 标架，即

$$\vec{r}_1(0)=\vec{r}_2(0),\qquad\vec{\alpha}_1(0)=\vec{\alpha}_2(0),\quad\vec{\beta}_1(0)=\vec{\beta}_2(0),\quad\vec{\gamma}_1(0)=\vec{\gamma}_2(0),$$

并且仍有 $k_1 = k_2 =: k$，$\tau_1 = \tau_2 =: \tau$。故接下来只需证明：此时 C_1 与 C_2 完全重合，即 $\vec{r}_1(s) \equiv \vec{r}_2(s)$。

第二步（两个 *Frenet* 标架处处相同）。为此考虑函数

$$f(s) := |\vec{\alpha}_1(s) - \vec{\alpha}_2(s)|^2 + |\vec{\beta}_1(s) - \vec{\beta}_2(s)|^2 + |\vec{\gamma}_1(s) - \vec{\gamma}_2(s)|^2,$$

则 $f \geq 0$，且由第一步 $f(0) = 0$。记 $\Delta\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2$，$\Delta\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2$，$\Delta\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 - \vec{\gamma}_2$。由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|\vec{v}|^2 = 2\langle \vec{v}, \dot{\vec{v}} \rangle$，

$$\dot{f} = 2\langle \Delta\vec{\alpha}, \dot{\vec{\alpha}}_1 - \dot{\vec{\alpha}}_2 \rangle + 2\langle \Delta\vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}}_1 - \dot{\vec{\beta}}_2 \rangle + 2\langle \Delta\vec{\gamma}, \dot{\vec{\gamma}}_1 - \dot{\vec{\gamma}}_2 \rangle.$$

对 C_1, C_2 分别用 Frenet 公式 $\dot{\vec{\alpha}}_i = k\vec{\beta}_i$、$\dot{\vec{\beta}}_i = -k\vec{\alpha}_i + \tau\vec{\gamma}_i$、$\dot{\vec{\gamma}}_i = -\tau\vec{\beta}_i$（$i = 1, 2$，注意两条曲线的 k, τ 相同，这正是用到假设 1)、2) 的地方），两式相减：

$$\dot{\vec{\alpha}}_1 - \dot{\vec{\alpha}}_2 = k\,\Delta\vec{\beta}, \qquad \dot{\vec{\beta}}_1 - \dot{\vec{\beta}}_2 = -k\,\Delta\vec{\alpha} + \tau\,\Delta\vec{\gamma}, \qquad \dot{\vec{\gamma}}_1 - \dot{\vec{\gamma}}_2 = -\tau\,\Delta\vec{\beta}.$$

代入 $\dot{f}$：

$$\begin{aligned} \dot{f} &= 2k\langle \Delta\vec{\alpha}, \Delta\vec{\beta} \rangle + 2\langle \Delta\vec{\beta}, -k\Delta\vec{\alpha} + \tau\Delta\vec{\gamma} \rangle + 2\langle \Delta\vec{\gamma}, -\tau\Delta\vec{\beta} \rangle \\ &= 2\Big(k\langle \Delta\vec{\alpha}, \Delta\vec{\beta} \rangle - k\langle \Delta\vec{\beta}, \Delta\vec{\alpha} \rangle + \tau\langle \Delta\vec{\beta}, \Delta\vec{\gamma} \rangle - \tau\langle \Delta\vec{\gamma}, \Delta\vec{\beta} \rangle \Big) = 0, \end{aligned}$$

最后一步用了内积的对称性 $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$，四项两两抵消。所以 $f(s) \equiv f(0) = 0$。因为 f 是三个非负项之和，三项必须同时为零，即

$$\vec{\alpha}_1(s) \equiv \vec{\alpha}_2(s), \qquad \vec{\beta}_1(s) \equiv \vec{\beta}_2(s), \qquad \vec{\gamma}_1(s) \equiv \vec{\gamma}_2(s).$$

第三步（曲线本身重合）。由 $\vec{\alpha}_i = \dot{\vec{r}}_i$ 及 $\vec{\alpha}_1 \equiv \vec{\alpha}_2$ 得 $\dot{\vec{r}}_1 \equiv \dot{\vec{r}}_2$，即 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \equiv \vec{0}$，所以 $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ 在区间 I 上是常向量：

$$\vec{r}_1(s) = \vec{r}_2(s) + \vec{c}.$$

再由初始条件 $\vec{r}_1(0) = \vec{r}_2(0)$ 得 $\vec{c} = \vec{0}$，从而 $\vec{r}_1(s) \equiv \vec{r}_2(s)$。这说明 C_1 经过 σ 之后完全与 C_2 重合，即原来的 $\sigma(C_1) = C_2$。$\blacksquare$

定理 5.1 的一般参数形式

在实际使用中，两条曲线往往不是用弧长参数写出来的，此时有如下的推广形式。

定理 *5.1′*：设 $C_1 : \vec{r} = \vec{r}_1(t)$ 与 $C_2 : \vec{r} = \vec{r}_2(\lambda)$ 是 E^3 中两条曲率处处非零的正则曲线，$s_1(t)$、$s_2(\lambda)$ 分别是它们的弧长函数。假设存在函数 $\lambda = \lambda(t)$，$\lambda'(t) \neq 0$，使得

(1) $s_1(t) = s_2(\lambda(t))$ $(=: s)$，

(2) $k_1(t)=k_2(\lambda(t))$,

(3) $\tau_1(t)=\tau_2(\lambda(t))$,

则这两条曲线之间相差一个刚体运动。

证明：因为 C_1 正则，$\dfrac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t}=|\vec{r}_1\,'(t)|>0$，所以 $s=s_1(t)$ 严格单调，可以反解出 $t=t(s)$。令

$$\tilde{\vec{r}}_1(s):=\vec{r}_1(t(s)),\qquad \tilde{\vec{r}}_2(s):=\vec{r}_2\big(\lambda(t(s))\big).$$

前者是 C_1 的弧长参数化；后者是 C_2 经过参数变换 $\lambda=\lambda(t(s))$（导数 $\lambda'\neq 0$，是容许参数变换）得到的参数化，并且由条件 (1)，$s_2\big(\lambda(t(s))\big)=s_1(t(s))=s$，所以 s 也恰好是 C_2 的弧长参数。曲率、挠率是曲线上每一点自己的几何量，与参数无关，因此作为 s 的函数，由条件 (2)、(3)，

$$\tilde{k}_2(s)=k_2\big(\lambda(t(s))\big)=k_1(t(s))=\tilde{k}_1(s),\qquad \tilde{\tau}_2(s)=\tau_2\big(\lambda(t(s))\big)=\tau_1(t(s))=\tilde{\tau}_1(s).$$

于是 $\tilde{\vec{r}}_1(s)$ 与 $\tilde{\vec{r}}_2(s)$ 满足定理 5.1 的全部条件，从而存在刚体运动 σ 使 $\sigma(C_1)=C_2$。■

定理 5.2（存在性定理）

定理 5.2：设区间 I 上有两个连续可微函数 $k=k(s)>0$ 及 $\tau=\tau(s)$，$s\in I$。则必存在 E^3 中一条正则曲线 $C:\vec{r}=\vec{r}(s)$，满足

(1) s 为曲线 C 上的弧长参数；

(2) $k=k(s)$ 为 C 上的曲率函数；

(3) $\tau=\tau(s)$ 为 C 上的挠率函数。

证明：

第一步（把 Frenet 公式当作微分方程组来解）。把 $k=k(s)>0$、$\tau=\tau(s)$ 代入 Frenet 公式，得到关于未知函数 $\{\vec{r};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 的常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}=\vec{e}_1,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix},\end{cases}\qquad A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix},\tag{$*$}$$

展开写就是 $\dot{\vec{e}}_1=k\vec{e}_2$，$\dot{\vec{e}}_2=-k\vec{e}_1+\tau\vec{e}_3$，$\dot{\vec{e}}_3=-\tau\vec{e}_2$，并且 A 是反对称矩阵：$a_{ij}+a_{ji}=0$。

给定初始条件（不妨设 $0\in I$）

$$\vec{r}(0)=\vec{r}_0\,(\text{任意常向量}),\qquad \vec{e}_1(0)=\vec{e}_1^{\,0},\quad \vec{e}_2(0)=\vec{e}_2^{\,0},\quad \vec{e}_3(0)=\vec{e}_3^{\,0},$$

并且要求 $\{\vec{e}_1^{\,0},\vec{e}_2^{\,0},\vec{e}_3^{\,0}\}$ 构成 E^3 中的一个笛卡尔标架的方向向量，即

(i) $\vec{e}_i^{\,0}\cdot\vec{e}_j^{\,0}=\delta_{ij}$，$\forall 1\le i,j\le 3$（彼此单位且正交）；

(ii) $(\vec{e}_1^{\,0},\vec{e}_2^{\,0},\vec{e}_3^{\,0})=1$（右手系）。

例如可取 $\vec{e}_i^{\,0}$ 为标准基。方程组 $(*)$ 是关于 12 个未知函数（三个分量，共四个向量）的线性常微分方程组，系数 $k(s),\tau(s)$ 在 I 上连续，由常微分方程解的存在唯一性定理，$(*)$ 在整个区间 I 上存在唯一的解 $\{\vec{r}(s);\vec{e}_1(s),\vec{e}_2(s),\vec{e}_3(s)\}$。

再看这个解的光滑性：系数连续，所以 $\vec{e}_i$ 连续可微；$\vec{r}\,'=\vec{e}_1$ 连续可微，故 $\vec{r}\in C^2$；而 $\dot{\vec{e}}_1=k\vec{e}_2$，这里 k 连续可微（这正是定理假设 k 连续可微的用处）、$\vec{e}_2$ 连续可微，所以 $\vec{e}_1$ 二阶连续可导，从而 $\vec{r}\in C^3(I)$。

下面验证这条曲线 $C:\vec{r}=\vec{r}(s)$ 满足 (1)–(3)，关键是先证明 $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 在每一点都仍是右手单位正交基。

第二步（$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 处处单位正交）。考虑关于 s 的函数矩阵 $(g_{ij})_{3\times 3}$，

$$g_{ij}(s):=\vec{e}_i(s)\cdot\vec{e}_j(s)-\delta_{ij}.$$

由条件 (i)，$g_{ij}(0)=0$。我们要证明 $g_{ij}(s)\equiv 0$，即 $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j\equiv\delta_{ij}$。事实上，由 $\dot{\vec{e}}_i=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\vec{e}_k$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g_{ij}=\dot{\vec{e}}_i\cdot\vec{e}_j+\vec{e}_i\cdot\dot{\vec{e}}_j=\Big\langle\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\vec{e}_k,\vec{e}_j\Big\rangle+\Big\langle\vec{e}_i,\sum_{k=1}^{3}a_{jk}\vec{e}_k\Big\rangle=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\,\vec{e}_k\cdot\vec{e}_j+\sum_{k=1}^{3}a_{jk}\,\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k.$$

根据 $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=g_{ij}+\delta_{ij}$ 代入：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g_{ij}&=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\,(g_{kj}+\delta_{kj})+\sum_{k=1}^{3}a_{jk}\,(g_{ik}+\delta_{ik})\\&=\sum_{k=1}^{3}\big(a_{ik}g_{kj}+a_{jk}g_{ik}\big)+\underbrace{\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\delta_{kj}}_{=a_{ij}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{3}a_{jk}\delta_{ik}}_{=a_{ji}}\\&=\sum_{k=1}^{3}\big(a_{ik}g_{kj}+a_{jk}g_{ik}\big)+(a_{ij}+a_{ji})=\sum_{k=1}^{3}\big(a_{ik}g_{kj}+a_{jk}g_{ik}\big),\end{aligned}$$

最后一步用了 A 反对称，$a_{ij}+a_{ji}=0$。所以 g_{ij} 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g_{ij}=\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\big(a_{ik}g_{kj}+a_{jk}g_{ik}\big),\\[2mm] g_{ij}(0)=0,\end{cases}\qquad 1\le i,j\le 3$$

（写成矩阵形式就是 $\dot{G}=AG+GA^{\mathrm{T}}$，其中 $G=(g_{ij})$ 是对称矩阵）。这是关于 9 个未知函数 g_{ij} 的线性齐次常微分方程组，初值为零；而零函数 $g_{ij}\equiv 0$ 显然是它的一个解，再由常微分方程解的唯一性，这个初值问题的解就是 $g_{ij}\equiv 0$。于是

$$\vec{e}_i(s)\cdot\vec{e}_j(s)\equiv\delta_{ij},$$

即 $\{\vec{e}_1(s),\vec{e}_2(s),\vec{e}_3(s)\}$ 处处是单位正交基。

第三步（右手系）。由第二步，以 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 为行的矩阵 M 满足 $MM^{\mathrm{T}}=(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j)=I_3$，所以 $\big(\det M\big)^2=1$，即

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=\det M=\pm 1.$$

函数 $s\mapsto(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)(s)$ 在区间 I 上连续，只取 ±1 两个值，所以是常数；再由 $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)(0)=1$（条件 (ii)）得

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\equiv 1,$$

即 $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 构成右手系。此时 $\vec{e}_1\times\vec{e}_2$ 是单位向量且与 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 都垂直，所以等于 $\pm\vec{e}_3$；又 $(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)\cdot\vec{e}_3=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=1$，取正号，得

$$\vec{e}_3=\vec{e}_1\times\vec{e}_2.$$

第四步（验证 *(1)*、*(2)*、*(3)*）。由 $(*)$ 中第一个方程，$\vec{r}\,'=\vec{e}_1$，而 $|\vec{e}_1|=1$，所以 $|\vec{r}\,'|\equiv1$：$\vec{r}$ 满足正则曲线的两个条件（$\vec{r}\,'\neq\vec{0}$，且由第一步 $\vec{r}\in C^3$），并由 Th 2.1，s 是曲线 C 的弧长参数，这就是 (1)；同时单位切向量

$$\vec{\alpha}(s)=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}=\vec{e}_1(s).$$

再看 $(*)$ 中第二个方程的第一行：

$$\dot{\vec{\alpha}}=\dot{\vec{e}}_1=k\,\vec{e}_2\quad(=\ddot{\vec{r}}).$$

因为 $k>0$、$|\vec{e}_2|=1$，所以 $|\dot{\vec{\alpha}}|=k$，即 C 的曲率函数恰好是 $k(s)$，这就是 (2)；并且主法向量

$$\vec{\beta}=\frac{\dot{\vec{\alpha}}}{|\dot{\vec{\alpha}}|}=\vec{e}_2,$$

从而副法向量 $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3$（第三步）。也就是说，$\{\vec{r}(s);\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 恰好就是 C 的 Frenet 标架。最后看 $(*)$ 中第二个方程的第三行：

$$\dot{\vec{e}}_3=-\tau\,\vec{e}_2\iff\dot{\vec{\gamma}}=-\tau\vec{\beta},$$

两边与 $\vec{\beta}$ 作内积，由 $\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}=1$，得 $\tau=-\dot{\vec{\gamma}}\cdot\vec{\beta}$，这正是挠率的定义，所以 C 的挠率函数恰好是 $\tau(s)$，这就是 (3)。■

例：常曲率、常挠率的曲线

例：给定两个常数 $k>0$ 及 τ，求 E^3 中所有正则曲线，使得它们的曲率及挠率分别恒为 k 及 τ。

解：先看 E^3 中的圆柱螺线

$$C:\ \vec{r}=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt),\qquad a>0.$$

直接用一般参数下的公式计算（这个结果是基本要求，应当熟记）。求导得

$$\vec{r}' = (-a\sin t,\ a\cos t,\ b), \qquad \vec{r}'' = (-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0), \qquad \vec{r}''' = (a\sin t,\ -a\cos t,\ 0),$$

于是

$$|\vec{r}'|^2 = a^2 + b^2, \qquad \vec{r}' \times \vec{r}'' = (ab\sin t,\ -ab\cos t,\ a^2), \qquad |\vec{r}' \times \vec{r}''|^2 = a^2(a^2+b^2),$$

$$(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') = \vec{r}''' \cdot (\vec{r}' \times \vec{r}'') = a^2 b\sin^2 t + a^2 b\cos^2 t = a^2 b.$$

代入曲率公式与挠率公式：

$$k = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{a}{a^2+b^2} > 0, \qquad \tau = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2} = \frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

可见圆柱螺线的曲率与挠率都是常数。

反过来，对任意一对常数 (k, τ)，$k > 0$，反解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{a}{a^2+b^2} = k, \\ \dfrac{b}{a^2+b^2} = \tau \end{cases}$$

两式平方相加得 $k^2 + \tau^2 = \dfrac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2} = \dfrac{1}{a^2+b^2}$，即 $a^2+b^2 = \dfrac{1}{k^2+\tau^2}$，再代回两式，得

$$\begin{cases} a = \dfrac{k}{k^2+\tau^2} > 0, \\ b = \dfrac{\tau}{k^2+\tau^2}. \end{cases}$$

（反过来代入验证：此时 $a^2+b^2 = \dfrac{k^2+\tau^2}{(k^2+\tau^2)^2} = \dfrac{1}{k^2+\tau^2}$，所以 $\dfrac{a}{a^2+b^2} = k$，$\dfrac{b}{a^2+b^2} = \tau$，确实是原方程组的解。）于是圆柱螺线

$$H:\ \vec{r} = \left(\frac{k}{k^2+\tau^2}\cos t,\ \frac{k}{k^2+\tau^2}\sin t,\ \frac{\tau}{k^2+\tau^2}\,t\right)$$

的曲率与挠率恒为 k 与 τ，即 $k(t) \equiv k$，$\tau(t) \equiv \tau$。

最后说明这就是全部的解。设 C' 是任意一条曲率恒为 k、挠率恒为 τ 的正则曲线，取它的弧长参数 s。对螺线 H，$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{a^2+b^2} = \dfrac{1}{\sqrt{k^2+\tau^2}} =: c$ 是常数，所以 $s = ct$ 是它的弧长参数，H 的弧长参数化为

$$\vec{r}_H(s) = \left(a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c},\ b\,\frac{s}{c}\right),$$

其曲率、挠率仍恒为 k、τ（曲率、挠率与参数无关）。于是 C' 与 H 在各自的弧长参数下有 $k_{C'}(s) = k_H(s) = k > 0$，$\tau_{C'}(s) = \tau_H(s) = \tau$，由定理 5.1，存在刚体运动 σ 使

$\sigma(C')=H$，从而 $C'=\sigma^{-1}(H)$，而刚体运动的逆仍是刚体运动。反之，由前面“刚体运动下的 Frenet 标架”一节的命题，H 经任意刚体运动后曲率、挠率不变。因此：

空间中所有曲率为 k、挠率为 τ 的曲线，恰好就是上述圆柱螺线 H 经刚体运动后得到的曲线。

特别地：当 $\tau>0$ 时 $b>0$，是右旋螺线；当 $\tau<0$ 时 $b<0$，是左旋螺线；当 $\tau=0$ 时 $b=0$，$a=\dfrac{1}{k}$，H 退化为半径为 $\dfrac{1}{k}$ 的圆——这也就是说，曲率为常数 $k>0$ 的平面曲线只能是半径为 $1/k$ 的圆。

小结

定理 5.2 说明：任给 I 上的连续可微函数 $k(s)>0$ 与 $\tau(s)$，总存在以它们为曲率、挠率的曲线，而且对不同的初始标架 $\{\vec{r}_0;\vec{e}_1^{\,0},\vec{e}_2^{\,0},\vec{e}_3^{\,0}\}$ 解出的曲线，由定理 5.1 彼此相差一个刚体运动。因此，在刚体运动的意义下，曲率为正的空间曲线与函数对 $(k(s),\tau(s))$ 一一对应——曲率和挠率是曲线唯一的、完备的几何不变量。

2.6　曲线参数方程在一点的标准展开

前面几节用曲率 k、挠率 τ 刻画曲线的整体弯曲与扭转。本节在曲线的一点 P_0 附近把参数方程按弧长展开到三阶，并在 P_0 处的 Frenet 标架下写出各坐标分量。由此可以看出曲线在 P_0 附近的形状，并引出两条曲线“靠得有多近”的度量——**切触阶**，最后得到曲率中心、曲率圆与曲率半径。

本节设 $C:\vec{r}=\vec{r}(s)$ 是 E^3 中的 C^3 正则曲线，s 为弧长参数，且 $k(s)>0$。因为 $\ddot{\vec{r}}=k\vec{\beta}$ 是 C^1 的，$k=|\ddot{\vec{r}}|>0$ 也是 C^1 的，从而 $\vec{\beta}=\ddot{\vec{r}}/k$ 是 C^1 的，Frenet 公式 $\dot{\vec{\beta}}=-k\vec{\alpha}+\tau\vec{\gamma}$ 有意义。必要时平移参数，设所考察的点 $P_0=\vec{r}(0)$，并记

$$k_0=k(0),\quad k_0'=\dot{k}(0),\quad \tau_0=\tau(0),\quad \vec{\alpha}_0=\vec{\alpha}(0),\ \vec{\beta}_0=\vec{\beta}(0),\ \vec{\gamma}_0=\vec{\gamma}(0).$$

标准展开式

命题：以 $\{P_0;\vec{\alpha}_0,\vec{\beta}_0,\vec{\gamma}_0\}$ 为坐标系，记 $\vec{r}(s)-\vec{r}(0)=x(s)\vec{\alpha}_0+y(s)\vec{\beta}_0+z(s)\vec{\gamma}_0$，则当 $s\to 0$ 时

$$\begin{cases} x(s)=s-\dfrac{k_0^2}{6}s^3+o(s^3),\\[2mm] y(s)=\dfrac{k_0}{2}s^2+\dfrac{k_0'}{6}s^3+o(s^3),\\[2mm] z(s)=\dfrac{k_0\tau_0}{6}s^3+o(s^3). \end{cases}$$

证明：因为 $\vec{r}\in C^3$，由带 Peano 余项的 Taylor 公式，

$$\vec{r}(s)=\vec{r}(0)+\dot{\vec{r}}(0)\,s+\frac{\ddot{\vec{r}}(0)}{2}\,s^2+\frac{\dddot{\vec{r}}(0)}{6}\,s^3+o(s^3).$$

下面把 $\vec{r}$ 在 $s=0$ 处的前三阶导数用 Frenet 标架表示。由 $\dot{\vec{r}}=\vec{\alpha}$，

$$\dot{\vec{r}}(0)=\vec{\alpha}_0;$$

由 $\dot{\vec{\alpha}}=k\vec{\beta}$，

$$\ddot{\vec{r}}(0)=\dot{\vec{\alpha}}(0)=k_0\vec{\beta}_0;$$

再对 $\ddot{\vec{r}}=k\vec{\beta}$ 求导，并用 Frenet 公式 $\dot{\vec{\beta}}=-k\vec{\alpha}+\tau\vec{\gamma}$，

$$\dddot{\vec{r}}=\dot{k}\,\vec{\beta}+k\dot{\vec{\beta}}=\dot{k}\,\vec{\beta}+k(-k\vec{\alpha}+\tau\vec{\gamma})=-k^2\vec{\alpha}+\dot{k}\,\vec{\beta}+k\tau\,\vec{\gamma},$$

于是

$$\dddot{\vec{r}}\,(0)=-k_0^2\,\vec{\alpha}_0+k_0'\,\vec{\beta}_0+k_0\tau_0\,\vec{\gamma}_0.$$

代入 Taylor 公式并按 $\vec{\alpha}_0,\vec{\beta}_0,\vec{\gamma}_0$ 合并同类项：

$$\begin{aligned}\vec{r}(s)-\vec{r}(0)&=s\,\vec{\alpha}_0+\frac{k_0}{2}s^2\,\vec{\beta}_0+\frac{s^3}{6}\big(-k_0^2\vec{\alpha}_0+k_0'\vec{\beta}_0+k_0\tau_0\vec{\gamma}_0\big)+o(s^3)\\&=\Big(s-\frac{k_0^2}{6}s^3\Big)\vec{\alpha}_0+\Big(\frac{k_0}{2}s^2+\frac{k_0'}{6}s^3\Big)\vec{\beta}_0+\frac{k_0\tau_0}{6}s^3\,\vec{\gamma}_0+o(s^3).\end{aligned}$$

（这里 $o(s^3)$ 是向量，它在三个方向上的分量都是 $o(s^3)$。）比较系数即得命题。■

注：展开式说明：到三阶为止，曲线在 P_0 附近的形状只由 k_0，k_0'，τ_0 三个数决定；其中 $\vec{\alpha}_0$ 方向的主部是 s，$\vec{\beta}_0$ 方向的主部是 $\frac{k_0}{2}s^2$（二阶，体现弯曲），$\vec{\gamma}_0$ 方向的主部是 $\frac{k_0\tau_0}{6}s^3$（三阶，体现扭转）。

近似曲线

在上面的展开式中，每个坐标分量只保留其主部（最低阶的一项），得到曲线

$$\widetilde{C}:\quad \tilde{\vec{r}}(s)=(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=\Big(s,\ \frac{k_0}{2}s^2,\ \frac{k_0\tau_0}{6}s^3\Big),$$

坐标是相对于标架 $\{P_0;\vec{\alpha}_0,\vec{\beta}_0,\vec{\gamma}_0\}$ 而言的。称 $\widetilde{C}$ 为 C 在 P_0 处的**近似曲线**。注意：s 不是 $\widetilde{C}$ 的弧长参数，只是一个“近似弧长”，下面具体看它与弧长差多少。

$\widetilde{C}$ **的性质**：逐阶求导，

$$\begin{aligned}\tilde{\vec{r}}\,'(s)&=\Big(1,\ k_0s,\ \frac{k_0\tau_0}{2}s^2\Big),\\\tilde{\vec{r}}\,''(s)&=\big(0,\ k_0,\ k_0\tau_0 s\big),\\\tilde{\vec{r}}\,'''(s)&=\big(0,\ 0,\ k_0\tau_0\big).\end{aligned}$$

(1) **相交**：$\tilde{\vec r}(0)=(0,0,0)=\vec r(0)$，即 C 与 $\widetilde{C}$ 在 $s=0$ 处相交。

(2) **s 是弧长到二阶**：记 $u=k_0^2s^2+\frac14k_0^2\tau_0^2s^4$，则 $|\tilde{\vec r}'(s)|=\sqrt{1+u}$，而

$$0\le|\tilde{\vec r}'(s)|-1=\frac{u}{1+\sqrt{1+u}}\le\frac{u}{2}=O(s^2).$$

（更精确地，$|\tilde{\vec r}'|-1=\frac12k_0^2s^2+O(s^4)$，所以在 $s=0$ 处 $|\tilde{\vec r}'|=1$ 且 $\frac{\mathrm d}{\mathrm ds}|\tilde{\vec r}'|=0$。）

(3) **$s=0$ 处的前三阶导数**：$\tilde{\vec r}'(0)=(1,0,0)$，$\tilde{\vec r}''(0)=(0,k_0,0)$，$\tilde{\vec r}'''(0)=(0,0,k_0\tau_0)$。

(4) **曲率、挠率**：用一般参数的公式，

$$\tilde k(0)=\frac{|\tilde{\vec r}'\times\tilde{\vec r}''|}{|\tilde{\vec r}'|^3}\Big|_{s=0}=|(1,0,0)\times(0,k_0,0)|=|(0,0,k_0)|=k_0,$$

$$\tilde\tau(0)=\frac{(\tilde{\vec r}',\tilde{\vec r}'',\tilde{\vec r}''')}{|\tilde{\vec r}'\times\tilde{\vec r}''|^2}\Big|_{s=0}=\frac{\det\operatorname{diag}(1,\ k_0,\ k_0\tau_0)}{k_0^2}=\frac{k_0^2\tau_0}{k_0^2}=\tau_0.$$

(5) ***Frenet* 标架**：在 $s=0$ 处，

$$\tilde{\vec\alpha}=\frac{\tilde{\vec r}'}{|\tilde{\vec r}'|}=(1,0,0),\quad \tilde{\vec\gamma}=\frac{\tilde{\vec r}'\times\tilde{\vec r}''}{|\tilde{\vec r}'\times\tilde{\vec r}''|}=(0,0,1),\quad \tilde{\vec\beta}=\tilde{\vec\gamma}\times\tilde{\vec\alpha}=(0,1,0),$$

恰好就是坐标系自身的三个基向量 $\vec\alpha_0,\vec\beta_0,\vec\gamma_0$。

所以 C 与 $\widetilde{C}$ 在 $s=0$ 处相切，且 $\tilde{\vec\alpha}(0)=\vec\alpha_0$，并且有相同的曲率、相同的挠率和相同的 Frenet 标架（$\tilde{\vec\beta}(0)=\vec\beta_0$，$\tilde{\vec\gamma}(0)=\vec\gamma_0$）。注意此时 C 的弧长参数 s 未必是 $\widetilde{C}$ 的弧长参数，即 $s\neq\tilde s$。

近似曲线的形状

把 $\widetilde{C}$ 向三个坐标平面作投影，各得一条平面曲线：

投影平面	投影曲线方程	形状
密切平面 $(\vec\alpha_0,\vec\beta_0)$	$\tilde y=\dfrac{k_0}{2}\tilde x^2$	抛物线，顶点 P_0，开口朝 $\vec\beta_0$
从切平面 $(\vec\alpha_0,\vec\gamma_0)$	$\tilde z=\dfrac{k_0\tau_0}{6}\tilde x^3$	三次曲线，$\tau_0\neq0$ 时 P_0 是拐点
法平面 $(\vec\beta_0,\vec\gamma_0)$	$\tilde z^2=\dfrac{2\tau_0^2}{9k_0}\tilde y^3$	半立方抛物线，P_0 是尖点

前两个方程直接由 $\tilde x=s$ 消去参数得到。第三个方程的推导：由 $\tilde y=\frac{k_0}{2}s^2$ 得 $s^2=2\tilde y/k_0$，所以

$$\tilde z^2=\frac{k_0^2\tau_0^2}{36}\,s^6=\frac{k_0^2\tau_0^2}{36}\Big(\frac{2\tilde y}{k_0}\Big)^3=\frac{k_0^2\tau_0^2}{36}\cdot\frac{8\tilde y^3}{k_0^3}=\frac{2\tau_0^2}{9k_0}\,\tilde y^3.$$

（$\tau_0\neq 0$ 时 $\tilde z=\pm c\tilde y^{3/2}$，两支在原点都与 $\tilde y$ 轴即 $\vec\beta_0$ 方向相切，是尖点；$\tau_0=0$ 时退化为射线 $\tilde z=0,\ \tilde y\geq 0$。）

由此得到 $\widetilde C$（以及 C）在 P_0 附近形状的三条结论（图中箭头方向为 s 增大的方向）：

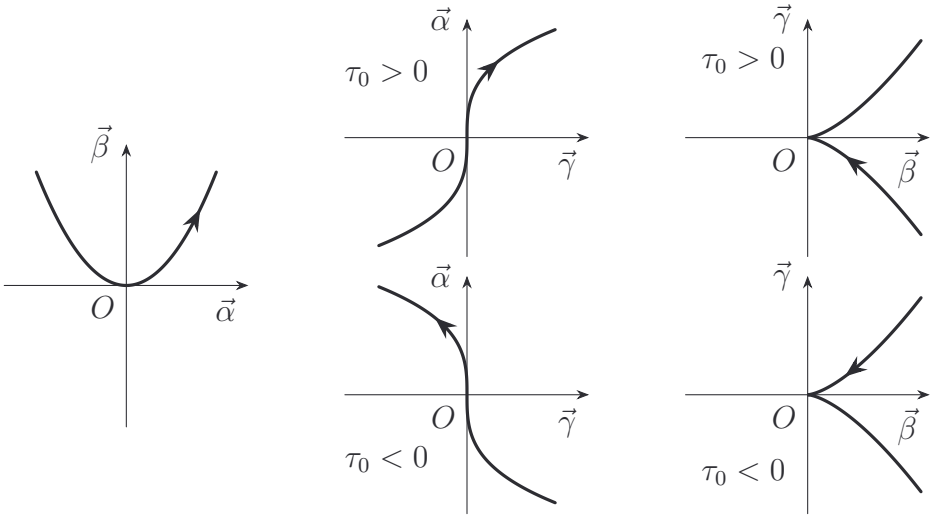
(1) 密切平面的方向为 z 轴正向（即定向密切平面的法向为 $\vec\gamma_0$，$\widetilde C$ 在 $s=0$ 处的密切平面就是 xy 平面）。

(2) 无论 $\tau_0>0$ 或 $\tau_0<0$，曲线 $\widetilde C$ 在 $s=0$ 处均穿过 $s=0$ 的密切平面。特别地：(i) 当 $\tau_0>0$ 时，曲线在 $s=0$ 处由密切平面下方穿越到上方；(ii) 当 $\tau_0<0$ 时，曲线在 $s=0$ 处由密切平面上方穿越到下方。这是因为 $\tilde z=\frac{k_0\tau_0}{6}s^3$ 的符号与 $\tau_0 s$ 相同。

(3) 无论 τ_0 为正或负，C 与 $\widetilde C$ 在 $s=0$ 处的弯曲方向总是与 $\vec\beta_0$ 方向一致（因为 $\tilde y=\frac{k_0}{2}s^2>0\ (s\neq 0)$，曲线位于从切平面 $\{y=0\}$ 的 $\vec\beta_0$ 一侧）。

注：对 C 本身，由标准展开式，$y(s)=\frac{k_0}{2}s^2+O(s^3)$ 在 $s\neq 0$ 小时为正，$z(s)=\frac{k_0\tau_0}{6}s^3+o(s^3)$ 在 $\tau_0\neq 0$ 时同样随 s 变号，所以结论 2、3 对 C 本身也成立。法平面上的投影则是 $(2,3)$ 型尖点（尖点切线沿 $\vec\beta_0$）。二阶看，曲线是弯向 $\vec\beta_0$ 的抛物线；三阶才离开密切平面。

下图是 $\widetilde C$ 在三个坐标平面上的投影（图中箭头表示 s 增大的方向）。左：密切平面；中：从切平面，上 $\tau_0>0$、下 $\tau_0<0$；右：法平面，上 $\tau_0>0$、下 $\tau_0<0$。



无穷小的阶

前面已经多次用到记号 $o(\cdot)$、$O(\cdot)$，这里统一说明，并引入无穷小的阶。以下都是 $s\to 0$ 时的极限过程。

若 $\lim_{s\to 0}f(s)=0$，称 f 为**无穷小**。设 f,g 是无穷小，且 $s\neq 0$ 时 $g(s)\neq 0$，则

(1) $f=o(g)$ 表示 $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{f(s)}{g(s)}=0$，即 f 是比 g 高阶的无穷小；

(2) $f=O(g)$ 表示存在 $M,\delta>0$，使得 $|f(s)|\le M|g(s)|$ 对 $0<|s|<\delta$ 成立；

(3) 若 $\lim\limits_{s\to0}\dfrac{f(s)}{g(s)}=c$，$0<|c|<\infty$，称 f 与 g 同阶（$c=1$ 时称等价）。

定义（无穷小的阶）：以 $|s|$ 为基准。若存在实数 $m>0$，使得

$$\lim_{s\to0}\frac{|f(s)|}{|s|^m}=c,\qquad 0<c<\infty,$$

则称 f 是 s 的 m **阶无穷小**。（f 为向量值函数时，对 $|\vec f(s)|$ 如此定义。）若 $f(s)=as^m+o(|s|^m)$，$a\neq0$，则 f 是 m 阶无穷小，$c=|a|$，称 as^m 为 f 的**主部**。

性质：

(1) 若 f 是 m 阶无穷小，则 $f=O(|s|^m)$；对任何 $l<m$，$f=o(|s|^l)$；但 $f\neq o(|s|^m)$。

(2) 若 f,g 分别是 m,l 阶无穷小，则 fg 是 $m+l$ 阶无穷小；当 $m<l$ 时 $f+g$ 仍是 m 阶无穷小（低阶项决定阶数）。

例：由标准展开式，当 $k_0\neq0$ 时，$y(s)=\frac{k_0}{2}s^2+O(s^3)$ 是 s 的 2 阶无穷小，主部 $\frac{k_0}{2}s^2$；$x(s)-s=-\frac{k_0^2}{6}s^3+o(s^3)$ 是 3 阶无穷小；当 $k_0\tau_0\neq0$ 时 $z(s)$ 是 3 阶无穷小，主部 $\frac{k_0\tau_0}{6}s^3$；$|\tilde{\vec r}'|-1=\frac12k_0^2s^2+O(s^4)$ 是 2 阶无穷小。近似曲线 $\widetilde C$ 的每个坐标分量取的正是标准展开式中该分量的主部。

曲线的切触阶

近似曲线 $\widetilde C$ 与 C 究竟有多“贴近”？为精确表述，引入两条相交（相切）曲线在交点处的切触阶。

定义：考虑 E^3 中两条在 P_0 处相交的参数曲线 $C_1:\vec r=\vec r_1(s)$，$C_2:\vec r=\vec r_2(s)$，其中 s 为 C_1 与 C_2 的弧长参数。不妨设 P_0 对应于 $s=0$。则对于（充分小的）$s>0$，考虑 C_1 与 C_2（正方向上）两个距离 P_0 弧长均为 s 的点 $P_1=\vec r_1(s)$ 及 $P_2=\vec r_2(s)$。如果

$$\begin{cases}\lim\limits_{s\to0}\dfrac{|P_1P_2|}{s^{n+1}}\neq0,\\[2mm] \lim\limits_{s\to0}\dfrac{|P_1P_2|}{s^n}=0,\end{cases}\qquad n\in\mathbb{Z},\ n\ge0,$$

则称 C_1 与 C_2 在 P_0 处 n **阶切触**。若只有 $\lim\limits_{s\to0}\dfrac{|P_1P_2|}{s^n}=0$，则称它们在 P_0 处**至少有 n 阶切触**。（这里“$\neq0$”指极限存在且不为零，$n=0$ 时就是 $|P_1P_2|\to0$ 但 $|P_1P_2|/s\not\to0$。）

性质：若 C_1 与 C_2 在 P_0 处 n 阶切触，则对于任意 $0\le k\le n$，

$$\lim_{s\to0}\frac{|P_1P_2|}{s^k}=0.$$

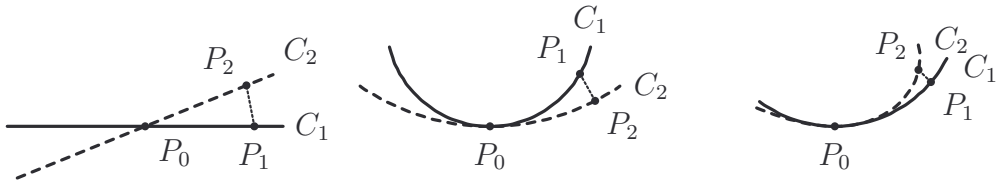
证明：当 $k<n$ 时，

$$\lim_{s\to0}\frac{|P_1P_2|}{s^k}=\lim_{s\to0}\left(\frac{|P_1P_2|}{s^n}\cdot s^{n-k}\right)=0,$$

因为第一个因子 $\dfrac{|P_1P_2|}{s^n}\to 0$（由定义），第二个因子 $s^{n-k}\to 0$（$n-k>0$）；当 $k=n$ 时就是定义中的第二个条件。■

换句话说，n 阶切触蕴含至少 k 阶切触（$k\le n$）；“至少 0 阶切触”只是说两条曲线过同一点 P_0；n 越大，两条曲线在 P_0 附近贴得越紧。

下图是 $0,1,2$ 阶切触的三种典型情形：实线为 C_1，虚线为 C_2，P_1,P_2 是两条曲线上由 P_0 起算弧长同为 s 的点，点线段为 P_1P_2。



(a) 0 阶切触　　(b) 1 阶切触　　(c) 2 阶切触

$|P_1P_2|$ 是 s 的 1 阶无穷小　$|P_1P_2|$ 是 s 的 2 阶无穷小　$|P_1P_2|$ 是 s 的 3 阶无穷小

三种情形都可以用标准展开式算出 $|P_1P_2|$ 的阶。(a) 中两条直线的单位切向量不同，$|P_1P_2|=|\vec\alpha_1-\vec\alpha_2|\,s$。(b)、(c) 中两条曲线在 P_0 处有相同的定向切线，并且弯向同一侧，故可用同一个标架 $\{P_0;\vec\alpha_0,\vec\beta_0\}$，设曲率分别为 $k_i(s)$（$i=1,2$），则

$$\vec r_i(s)-\vec r(0)=\Big(s-\frac{k_i^2}{6}s^3,\ \frac{k_i}{2}s^2+\frac{k_i'}{6}s^3\Big)+o(s^3),$$

于是

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\Big(-\frac{k_1^2-k_2^2}{6}s^3,\ \frac{k_1-k_2}{2}s^2+\frac{k_1'-k_2'}{6}s^3\Big)+o(s^3),$$

其中 k_i,k_i' 都是 $s=0$ 处的值。若 $k_1\ne k_2$（图 (b)，曲率半径 1.8 与 4），$|P_1P_2|=\frac{|k_1-k_2|}{2}s^2+o(s^2)$ 是 2 阶无穷小；若 $k_1=k_2$ 而 $k_1'\ne k_2'$（图 (c)，C_1 为圆，C_2 的曲率 $k_2(s)=k_0(1+0.6s)$，曲率半径 $1/k_0=2.2$），$|P_1P_2|=\frac{|k_1'-k_2'|}{6}s^3+o(s^3)$ 是 3 阶无穷小。

可以看到：切触阶越高，$|P_1P_2|$ 趋于 0 越快，$|P_1P_2|$ 作为 s 的无穷小的阶恰比切触阶大 1。这一点在定理 6.1 之后严格叙述（见“用无穷小的阶重述切触阶”）。

下面的定理把切触阶转化为导数的比较。

定理 *6.1*：设 $C_1:\vec r=\vec r_1(s)$ 与 $C_2:\vec r=\vec r_2(s)$ 在 $s=0$ 处相切，其中 s 为 C_1 与 C_2 的弧长参数，且 $\vec r_1,\vec r_2$ 是 C^{n+1} 的。则 C_1 与 C_2 在 $s=0$ 处 n (≥ 1) 阶切触，当且仅当

$$\begin{cases}\vec r_1\,'(0)=\vec r_2\,'(0),\ \ \vec r_1\,''(0)=\vec r_2\,''(0),\ \ \dots,\ \ \vec r_1^{\,(n)}(0)=\vec r_2^{\,(n)}(0),\\ \vec r_1^{\,(n+1)}(0)\ne\vec r_2^{\,(n+1)}(0).\end{cases}$$

证明： ***第一步：Taylor 展开。***首先将 $C_1:\vec r=\vec r_1(s)$ 与 $C_2:\vec r=\vec r_2(s)$ 在 $s=0$ 处进行 Taylor 展开：对 $i=1,2$，

$$\vec r_i(s)=\vec r_i(0)+\vec r_i\,'(0)s+\frac{\vec r_i\,''(0)}{2}s^2+\cdots+\frac{\vec r_i^{\,(n)}(0)}{n!}s^n+\frac{\vec r_i^{\,(n+1)}(0)}{(n+1)!}s^{n+1}+o(s^{n+1}).$$

第二步：写出 $|P_1P_2|$。进而，对于距离 P_0 弧长均为 s 的两个曲线上的点 $P_1(s)$ 及 $P_2(s)$，有

$$\begin{aligned}|P_1P_2| &= \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \left|\vec{r}_1(s)-\vec{r}_2(s)\right| \\ &= \Big|\big(\vec{r}_1(0)-\vec{r}_2(0)\big)+\big(\vec{r}_1\,'(0)-\vec{r}_2\,'(0)\big)s+\frac{1}{2}\big(\vec{r}_1\,''(0)-\vec{r}_2\,''(0)\big)s^2+\cdots \\ &\qquad +\frac{1}{n!}\big(\vec{r}_1^{\,(n)}(0)-\vec{r}_2^{\,(n)}(0)\big)s^n+\frac{\vec{r}_1^{\,(n+1)}(0)-\vec{r}_2^{\,(n+1)}(0)}{(n+1)!}s^{n+1}+o(s^{n+1})\Big|. \qquad (*)\end{aligned}$$

记 $\Delta_j=\vec{r}_1^{\,(j)}(0)-\vec{r}_2^{\,(j)}(0)$（$j=0,1,\dots,n+1$），则 $(*)$ 括号内为 $\sum_{j=0}^{n+1}\frac{\Delta_j}{j!}s^j+o(s^{n+1})$，其中 $\Delta_0=\vec{r}_1(0)-\vec{r}_2(0)=\vec{0}$（两曲线都过 P_0）。

第三步：充分性（$\Leftarrow$）。若 $\vec{r}_1^{\,(k)}(0)=\vec{r}_2^{\,(k)}(0)$，$k=0,1,2,\dots,n$ 成立（$k=0$ 是共同的交点，$k=1$ 是相切），即 $\Delta_0=\cdots=\Delta_n=\vec{0}$，则 $(*)$ 中前 $n+1$ 项全部消失，

$$|P_1P_2|=\frac{1}{(n+1)!}\left|\vec{r}_1^{\,(n+1)}(0)-\vec{r}_2^{\,(n+1)}(0)\right|s^{n+1}+o(s^{n+1}).$$

（这里用了：对向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{w}=o(s^{n+1})$，$\big||\vec{a}\,s^{n+1}+\vec{w}|-|\vec{a}|s^{n+1}\big|\le|\vec{w}|=o(s^{n+1})$。）于是

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{s\to0}\frac{|P_1P_2|}{s^n}=\lim_{s\to0}\Big(\frac{|\Delta_{n+1}|}{(n+1)!}\,s+\frac{o(s^{n+1})}{s^n}\Big)=0,\\[2ex] \displaystyle\lim_{s\to0}\frac{|P_1P_2|}{s^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}\left|\vec{r}_1^{\,(n+1)}(0)-\vec{r}_2^{\,(n+1)}(0)\right|\neq0,\end{cases}$$

其中第二式的 $\neq0$ 正是条件 $\vec{r}_1^{\,(n+1)}(0)\neq\vec{r}_2^{\,(n+1)}(0)$。按定义，$C_1$ 与 C_2 在 $s=0$ 处 n 阶切触。

第四步：必要性（$\Rightarrow$）。反之，若 C_1 与 C_2 在 $s=0$ 处 n 阶切触，则由上述基本性质知：对于任意 $1\le k\le n$，

$$\lim_{s\to0}\frac{|\vec{r}_1(s)-\vec{r}_2(s)|}{s^k}=0. \qquad (**)$$

由 $k=1,2,\dots,n$ 依次递推，得 $\Delta_1=\cdots=\Delta_n=\vec{0}$。具体地：

- $k=1$：由 $(*)$ 及 $\Delta_0=\vec{0}$，

  $$\frac{\vec{r}_1(s)-\vec{r}_2(s)}{s}=\Delta_1+\frac{\Delta_2}{2}s+\cdots+\frac{\Delta_{n+1}}{(n+1)!}s^n+\frac{o(s^{n+1})}{s}\longrightarrow\Delta_1\quad(s\to0),$$

  所以 $\displaystyle\lim_{s\to0}\frac{|\vec{r}_1(s)-\vec{r}_2(s)|}{s}=|\Delta_1|$。由 $(**)$（$k=1$）知它等于 0，故 $\Delta_1=\vec{0}$。
- 设已得 $\Delta_1=\cdots=\Delta_{k-1}=\vec{0}$（$2\le k\le n$）。则

  $$\frac{\vec{r}_1(s)-\vec{r}_2(s)}{s^k}=\frac{\Delta_k}{k!}+\frac{\Delta_{k+1}}{(k+1)!}s+\cdots+\frac{\Delta_{n+1}}{(n+1)!}s^{n+1-k}+\frac{o(s^{n+1})}{s^k}\longrightarrow\frac{\Delta_k}{k!},$$

  （$n+1-k\ge1$，所以后面各项都趋于 0。）由 $(**)$ 知 $\dfrac{|\Delta_k|}{k!}=0$，故 $\Delta_k=\vec{0}$。

最后，已有 $\Delta_0=\cdots=\Delta_n=\vec{0}$，与第三步一样得到 $\lim\limits_{s\to0}\dfrac{|P_1P_2|}{s^{n+1}}=\dfrac{|\Delta_{n+1}|}{(n+1)!}$。而 n 阶切触的定义要求这个极限 $\neq0$，所以 $\Delta_{n+1}\neq\vec{0}$，即 $\vec{r}_1^{(n+1)}(0)\neq\vec{r}_2^{(n+1)}(0)$。证毕。■

注：

(1) 同样的推导给出“至少 n 阶”的版本：C_1,C_2 在 $s=0$ 处至少有 n 阶切触 $\iff$ $\vec{r}_1^{(k)}(0)=\vec{r}_2^{(k)}(0)$，$k=1,2,\dots,n$。（充分性：由 $(*)$，$|P_1P_2|=O(s^{n+1})=o(s^n)$；必要性：对 $k=1,\dots,n$ 的递推只用到 $\lim|P_1P_2|/s^k=0$，与上面第四步完全相同。）

(2) 取 $n=1$：至少一阶切触 $\iff$ $\vec{r}_1\,'(0)=\vec{r}_2\,'(0)$，即 $\vec{\alpha}_1(0)=\vec{\alpha}_2(0)$，也就是两条曲线在 P_0 处有相同的定向切线。

命题（用无穷小的阶重述切触阶）：设 C_1,C_2 同上（$s\to0^+$）。

(1) 若 $|P_1P_2|$ 是 s 的 $n+1$ 阶无穷小，则 C_1,C_2 在 P_0 处恰有 n 阶切触；

(2) 若 $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ 是 C^{n+1} 的，且 C_1,C_2 在 P_0 处恰有 n 阶切触，则 $|P_1P_2|$ 是 s 的 $n+1$ 阶无穷小，并且

$$\lim_{s\to0}\frac{|P_1P_2|}{s^{n+1}}=\frac{|\Delta_{n+1}|}{(n+1)!}.$$

所以（光滑时）“n 阶切触”等价于“$|P_1P_2|$ 是 s 的 $n+1$ 阶无穷小”，“至少 n 阶切触”等价于 $|P_1P_2|=O(s^{n+1})$。

证明：(1) 若 $\lim|P_1P_2|/s^{n+1}=c\in(0,\infty)$，则 $|P_1P_2|/s^n=\big(|P_1P_2|/s^{n+1}\big)s\to0$，而 $|P_1P_2|/s^{n+1}\to c\neq0$，按定义恰有 n 阶切触。(2) 由定理 6.1 的第三步，恰有 n 阶切触时 $\Delta_1=\cdots=\Delta_n=\vec{0}$，$\Delta_{n+1}\neq\vec{0}$，并且 $\lim|P_1P_2|/s^{n+1}=|\Delta_{n+1}|/(n+1)!\in(0,\infty)$。■

近似曲线的切触阶

定理 6.1 要求两条曲线都用弧长参数，而近似曲线 $\widetilde{C}$ 的参数 s 不是弧长。因此先证一个引理：只要 $\widetilde{C}$ “接近弧长参数”，仍可用来判断切触阶。

引理：设 $C:\vec{r}=\vec{r}(s)$ 以弧长 s 为参数，$\widetilde{C}:\tilde{\vec{r}}=\tilde{\vec{r}}(s)$ 是 C^1 曲线，$\tilde{\vec{r}}(0)=\vec{r}(0)=P_0$，$n\geq1$，并且当 $s\to0^+$ 时

$$\big|\vec{r}(s)-\tilde{\vec{r}}(s)\big|=O(s^{n+1}),\qquad\big|\,|\tilde{\vec{r}}\,'(s)|-1\big|=O(s^n).$$

则 C 与 $\widetilde{C}$ 在 P_0 处至少有 n 阶切触。

证明：设 $\sigma(s)=\int_0^s|\tilde{\vec{r}}\,'(w)|\,\mathrm{d}w$ 是 $\widetilde{C}$ 从 P_0 起算的弧长。由 $\sigma'(0)=1$，σ 在 0 附近可逆，$\sigma/s\to1$，并且

$$|\sigma(s)-s|=\left|\int_0^s\big(|\tilde{\vec{r}}\,'(w)|-1\big)\mathrm{d}w\right|=O(s^{n+1}).$$

把 $\widetilde{C}$ 改用它自己的弧长 σ 作参数后，$\widetilde{C}$ 上弧长为 σ 的点是 $\tilde{\vec{r}}(s)$（$s=s(\sigma)$），C 上弧长为 σ 的点是 $\vec{r}(\sigma)$。由于 $|\vec{r}'|=1$，有 $|\vec{r}(\sigma)-\vec{r}(s)|\le|\sigma-s|$，所以

$$\begin{aligned}|P_1P_2|=\left|\vec{r}(\sigma)-\tilde{\vec{r}}(s)\right|&\le|\vec{r}(\sigma)-\vec{r}(s)|+|\vec{r}(s)-\tilde{\vec{r}}(s)|\\&\le|\sigma-s|+O(s^{n+1})=O(s^{n+1}).\end{aligned}$$

而 $\sigma/s\to1$，故 $s^{n+1}=O(\sigma^{n+1})$，因此 $|P_1P_2|=O(\sigma^{n+1})=o(\sigma^n)$，即至少 n 阶切触。■

推论 *1*：设 $\vec{r}$ 是 C^{n+1} 的弧长参数曲线，则 C 与它在 $s=0$ 处的前 n 阶 Taylor 展开所得到的近似曲线

$$\widetilde{C}:\ \tilde{\vec{r}}(s)=\sum_{j=0}^{n}\frac{\vec{r}^{(j)}(0)}{j!}\,s^j$$

在 $s=0$ 处至少有 n 阶切触。

证明：因为 $\vec{r}\in C^{n+1}$，由 Taylor 公式 $|\vec{r}(s)-\tilde{\vec{r}}(s)|=O(s^{n+1})$。又 $\tilde{\vec{r}}'$ 恰是 $\vec{r}'$ 的 $n-1$ 阶 Taylor 多项式，而 $\vec{r}'\in C^n$，所以 $|\vec{r}'(s)-\tilde{\vec{r}}'(s)|=O(s^n)$。利用 $|\vec{r}'|=1$，

$$\left|\,|\tilde{\vec{r}}'|-1\right|=\left|\,|\tilde{\vec{r}}'|-|\vec{r}'|\right|\le|\tilde{\vec{r}}'-\vec{r}'|=O(s^n).$$

由引理即得结论。■

推论 *2*：充分光滑曲线 $C:\vec{r}=\vec{r}(s)$ 与它在 $s=0$ 处标准展开所得的近似曲线 $\widetilde{C}$ 在 $s=0$ 处至少有 2 阶切触。

证明：在标准展开式中，相对于标架 $\{P_0;\vec{\alpha}_0,\vec{\beta}_0,\vec{\gamma}_0\}$，

$$\vec{r}(s)-\tilde{\vec{r}}(s)=\left(-\frac{k_0^2}{6}s^3+o(s^3),\ \frac{k_0'}{6}s^3+o(s^3),\ o(s^3)\right)=O(s^3);$$

又前面已验证 $|\tilde{\vec{r}}'|-1=O(s^2)$。对 $n=2$ 用引理即得。■

注：也可以直接看 $\widetilde{C}$ 在 $s=0$ 处与 C 的前两阶导数：$\tilde{\vec{r}}(0)=\vec{r}(0)$，$\tilde{\vec{r}}'(0)=\vec{\alpha}_0=\vec{r}'(0)$，$\tilde{\vec{r}}''(0)=(0,k_0,0)=k_0\vec{\beta}_0=\vec{r}''(0)$（前面性质已验证），这正是定理 6.1 中 $n=2$ 所需的条件；不同的只是 s 不是 $\widetilde{C}$ 的弧长，所以严格说需要上面的引理来处理。推论 2 说明 C 在 P_0 附近的形状（到二阶）就是 $\widetilde{C}$ 的形状，所以前面从 $\widetilde{C}$ 读出的结论是可靠的。进一步，$\widetilde{C}$ 以其弧长 σ 重新参数化后与 C 的距离满足 $|P_1P_2|/\sigma^3\to|k_0'|/6$（只有 $\vec{\beta}_0$ 方向的 s^3 项没有抵消），所以 $k'(0)\neq0$ 时恰为 2 阶切触，此时 $|P_1P_2|$ 是 3 阶无穷小；$k'(0)=0$ 时则至少 3 阶。

推论 *3*：两条相交曲线在交点处至少有 2 阶切触，当且仅当如下三个条件成立：

(1) 在交点处相切且有相同的切方向：$\vec{\alpha}_1(0)=\vec{\alpha}_2(0)$；

(2) 在交点处有相同的曲率：$k_1(0)=k_2(0)$；

(3) 在交点处有相同方向的密切平面：$\vec{\gamma}_1(0)=\vec{\gamma}_2(0)$（即密切平面相同，并且法向 $\vec{\gamma}$ 所指的一侧也相同）。

（设两曲线都是 C^3 的，且 $k_1(0), k_2(0) > 0$。）

证明：设曲线 $C_1 : \vec{r} = \vec{r}_1(s)$，$C_2 : \vec{r} = \vec{r}_2(s)$，$s$ 为共同的弧长参数，交点对应 $s = 0$。则由定理 6.1（注 1，$n = 2$）知 C_1 与 C_2 在 $s = 0$ 处有至少 2 阶切触当且仅当

$$\vec{r}_1(0) = \vec{r}_2(0), \qquad \vec{r}_1\,'(0) = \vec{r}_2\,'(0), \qquad \vec{r}_1\,''(0) = \vec{r}_2\,''(0)$$

成立。由 $\vec{r}\,' = \vec{\alpha}$，$\vec{r}\,'' = k\vec{\beta}$，这三式依次等价于

$$\vec{r}_1(0) = \vec{r}_2(0), \qquad \vec{\alpha}_1(0) = \vec{\alpha}_2(0), \qquad k_1(0)\vec{\beta}_1(0) = k_2(0)\vec{\beta}_2(0).$$

第三式两边取模并用 $|\vec{\beta}_i| = 1$，$k_i > 0$ 得 $k_1(0) = k_2(0)$，再约去 k 得 $\vec{\beta}_1(0) = \vec{\beta}_2(0)$；反过来 $k_1(0) = k_2(0)$ 且 $\vec{\beta}_1(0) = \vec{\beta}_2(0)$ 显然蕴含第三式。

必要性（$\Rightarrow$）。若至少 2 阶切触，则 $\vec{\alpha}_1(0) = \vec{\alpha}_2(0)$，$k_1(0) = k_2(0)$ 且 $\vec{\beta}_1(0) = \vec{\beta}_2(0)$，于是

$$\vec{\gamma}_1(0) = \vec{\alpha}_1(0) \times \vec{\beta}_1(0) = \vec{\alpha}_2(0) \times \vec{\beta}_2(0) = \vec{\gamma}_2(0),$$

即密切平面相同且同向。

充分性（$\Leftarrow$）。反之，若 C_1 与 C_2 在 $s = 0$ 处相切、曲率相同且密切平面相同且同向，即 $\vec{\alpha}_1(0) = \vec{\alpha}_2(0)$，$k_1(0) = k_2(0)$，且 $\vec{\gamma}_1(0) = \vec{\gamma}_2(0)$。进而有 $\vec{r}_1\,'(0) = \vec{r}_2\,'(0)$，并且由 $\vec{\beta} = \vec{\gamma} \times \vec{\alpha}$ 得

$$\vec{\beta}_1(0) = \vec{\gamma}_1(0) \times \vec{\alpha}_1(0) = \vec{\gamma}_2(0) \times \vec{\alpha}_2(0) = \vec{\beta}_2(0),$$

从而 $\vec{r}_1\,''(0) = k_1(0)\vec{\beta}_1(0) = k_2(0)\vec{\beta}_2(0) = \vec{r}_2\,''(0)$。由定理 6.1，$C_1$ 与 C_2 在 $s = 0$ 处至少有 2 阶切触。■

注：条件 (3) 中“有向”不能丢。若两条曲线只有密切平面（作为平面）相同、但 $\vec{\gamma}_1 = -\vec{\gamma}_2$，则 $\vec{\beta}_1 = -\vec{\beta}_2$，它们在密切平面里弯向相反的两侧，只有一阶切触。

曲率中心、曲率圆与曲率半径

设 $k_0 = k(0) > 0$。

定义：设 O 为 E^3 的原点。称点 P，

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}(0) + \frac{1}{k_0}\,\vec{\beta}_0,$$

为 C 在 P_0 处的**曲率中心**；在密切平面内以 P 为圆心、$R = \dfrac{1}{k_0}$ 为半径的圆（它过 P_0）称为 C 在 P_0 处的**曲率圆**（密切圆）；$R = \dfrac{1}{k_0}$ 称为**曲率半径**。用一般参数，$R = \dfrac{|\vec{r}\,'|^3}{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}$。

命题：曲率圆与 C 在 P_0 处至少有 2 阶切触。

证明：曲率圆在密切平面内，圆心 $\vec{r}(0) + R\vec{\beta}_0$，且过 P_0、在 P_0 处沿 $\vec{\alpha}_0$ 方向，所以它以弧长 u 的参数方程为

$$\vec{c}(u) = \vec{r}(0) + R\sin\frac{u}{R}\,\vec{\alpha}_0 + R\Big(1 - \cos\frac{u}{R}\Big)\vec{\beta}_0.$$

验证它确实是以 u 为弧长的圆：$\vec{c}'(u)=\cos\frac{u}{R}\,\vec{\alpha}_0+\sin\frac{u}{R}\,\vec{\beta}_0$，$|\vec{c}'|=1$。再求导，

$$\vec{c}''(u)=-\frac{1}{R}\sin\frac{u}{R}\,\vec{\alpha}_0+\frac{1}{R}\cos\frac{u}{R}\,\vec{\beta}_0.$$

于是

$$\vec{c}(0)=\vec{r}(0),\qquad \vec{c}'(0)=\vec{\alpha}_0=\vec{r}'(0),\qquad \vec{c}''(0)=\frac{1}{R}\vec{\beta}_0=k_0\vec{\beta}_0=\vec{r}''(0).$$

由定理 6.1 的注 1（$n=2$），C 与曲率圆至少有 2 阶切触。■

注：在标架 $\{P_0;\vec{\alpha}_0,\vec{\beta}_0,\vec{\gamma}_0\}$ 下，曲率圆为 $x=R\sin\frac{u}{R}=u-\frac{u^3}{6R^2}+\cdots$，$y=R(1-\cos\frac{u}{R})=\frac{u^2}{2R}+\cdots$，$z=0$，而标准展开式中 $x=s-\frac{k_0^2}{6}s^3+\cdots$、$y=\frac{k_0}{2}s^2+\cdots$（注意 $1/R^2=k_0^2$，$1/R=k_0$），所以两者的 x 分量到 u^3 项、y 分量到 u^2 项完全吻合；差别只出现在 y 的 $\frac{k_0'}{6}s^3$ 项和 z 的 $\frac{k_0\tau_0}{6}s^3$ 项，都是三阶。再由推论 3 可知：曲率圆是**唯一**一个与 C 在 P_0 处至少 2 阶切触的圆——因为半径为 R_2 的圆曲率为 $1/R_2$，要求曲率为 k_0 就得 $R_2=R$；它的主法向 $\vec{\beta}$ 必须与 $\vec{\beta}_0$ 相同，圆心就是 $\vec{r}(0)+R\vec{\beta}_0$；它在 $\vec{\alpha}_0,\vec{\beta}_0$ 张成的密切平面内。

小结

本节的主线是：用 P_0 处的 Frenet 标架把 $\vec{r}(s)$ 展开到三阶（标准展开式），取各分量主部得到近似曲线 $\widetilde{C}$，它与 C 在 P_0 处有相同的 k,τ 和标架，并至少有 2 阶切触；两条曲线“至少 2 阶切触”恰等价于定向切线、曲率、定向密切平面三者在 P_0 处相同；曲率圆就是这种意义下最贴近 C 的圆。

2.7 平面曲线

前面几节讨论的是一般的空间曲线。本节讨论其中一类特殊的曲线——平面曲线。落在一个平面上的曲线可以借助平面本身的定向，定义一套比 Frenet 标架更方便的“相对 Frenet 标架”，并由此引入带符号的**相对曲率** k_r。本节先回顾一个圆柱螺线的例子，再建立相对 Frenet 标架和相对 Frenet 公式，再弄清楚 k 与 k_r、$\vec{\beta}$ 与 $\vec{\beta}_r$ 之间的关系，给出一般参数下 k_r 的计算公式，定义平面曲线的曲率中心；然后引入平面曲线的另一个参数——方向角 θ，并由此得到“平面曲线由相对曲率唯一确定”的结论；最后补充闭曲线、简单闭曲线与分段光滑曲线的定义。

例：圆柱螺线

例：圆柱螺线 $C:\ \vec{r}(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$，$a>0$。则 $k=\dfrac{a}{a^2+b^2}$，$\tau=\dfrac{b}{a^2+b^2}$。

计算：用一般参数的公式 $k=\dfrac{|\vec r'\times\vec r''|}{|\vec r'|^3}$，$\tau=\dfrac{(\vec r',\vec r'',\vec r''')}{|\vec r'\times\vec r''|^2}$。先求导：

$$\begin{aligned}\vec r'(t)&=(-a\sin t,\ a\cos t,\ b),\\ \vec r''(t)&=(-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0),\\ \vec r'''(t)&=(a\sin t,\ -a\cos t,\ 0).\end{aligned}$$

于是 $|\vec r'|=\sqrt{a^2+b^2}$，

$$\vec r'\times\vec r''=\big(ab\sin t,\ -ab\cos t,\ a^2\big),\qquad |\vec r'\times\vec r''|=\sqrt{a^2b^2+a^4}=a\sqrt{a^2+b^2},$$

$$(\vec r',\vec r'',\vec r''')=(\vec r'\times\vec r'')\cdot\vec r'''=a^2b\sin^2t+a^2b\cos^2t=a^2b.$$

所以

$$k=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}}=\frac{a}{a^2+b^2},\qquad \tau=\frac{a^2b}{a^2(a^2+b^2)}=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

（$b=0$ 时就是圆周，$\tau=0$，$k=1/a$。）

平面曲线与相对 Frenet 标架

设 $C:\vec r=\vec r(s)$（s 为弧长参数）位于空间中一个取定方向 $\vec n$ 的平面 Σ 上。为方便起见，不妨在 Σ 上任取一定点 O 为原点，建立 E^3 中的笛卡尔坐标系 $\{O;x,y,z\}$，使 $\vec n$ 为 z 轴正方向（即在此坐标系下，xOy 平面的法向朝上）。于是在此坐标系下可设

$$C:\ \vec r=\vec r(s)=\big(x(s),\ y(s),\ 0\big),$$

也就是说，在 Σ 的平面笛卡尔坐标系 $\{O;x,y\}$ 下可表示为 $C:\vec r=(x(s),y(s))\subset\Sigma$。

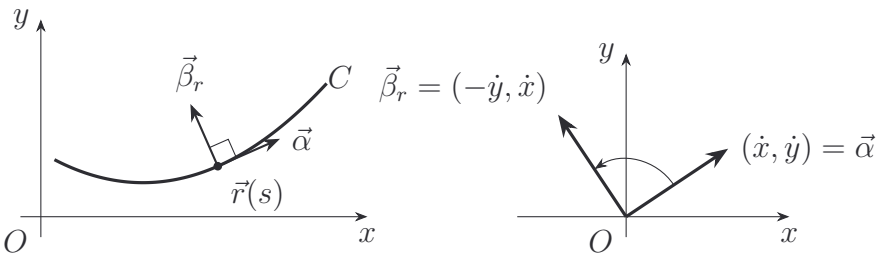
下面利用 C 位于具有方向 $\vec n$ 的平面 Σ 上这一几何特征，在 C 上定义**另一套**活动标架，称为**平面曲线的 Frenet 标架**（也简称为相对于 Σ 的**相对 Frenet 标架**）。先把它记为 $\{\vec r(s);\vec e_1(s),\vec e_2(s)\}$，定义如下：

$$\begin{cases}\vec e_1(s)=\dot{\vec r}(s)=\vec\alpha(s),\\ \vec e_2(s)\ \text{为}\vec e_1(s)\ \text{在}\Sigma\ \text{内逆时针旋转}90^\circ\ \text{而得，记为}\vec\beta_r(s).\end{cases}$$

具体地，

$$\begin{cases}\vec\alpha(s)=\dot{\vec r}(s)=(\dot x,\ \dot y),\\ \vec\beta_r(s)=(-\dot y,\ \dot x).\end{cases}$$

（逆时针旋转 90° 把向量 (x,y) 变为 $(-y,x)$；$|\vec\alpha|=1$ 蕴含 $|\vec\beta_r|=1$，且 $\vec\alpha\cdot\vec\beta_r=-\dot x\dot y+\dot y\dot x=0$，所以 $\{\vec\alpha,\vec\beta_r\}$ 是 Σ 内的标准正交基，并且与 $\{\vec e_x,\vec e_y\}$ 同定向。）



(a) 相对 Frenet 标架　　(b) $\vec{\alpha}$ 逆时针转 90° 得 $\vec{\beta}_r$

相对曲率与相对 Frenet 公式

问：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}s} = ?$　$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\beta}_r}{\mathrm{d}s} = ?$

*(1) $\dot{\vec{\alpha}}$ 的表达式。*由于 $|\vec{\alpha}| = 1$，有 $\dot{\vec{\alpha}} \perp \vec{\alpha}$；又 $\vec{\alpha} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$ 平行于 Σ，所以 $\dot{\vec{\alpha}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, 0)$ 也平行于 Σ。在 Σ 内与 $\vec{\alpha}$ 垂直的方向只有 $\vec{\beta}_r$ 的方向，所以 $\dot{\vec{\alpha}} \parallel \vec{\beta}_r$，可设

$$\dot{\vec{\alpha}} = k_r(s)\,\vec{\beta}_r(s).$$

用 $\vec{\beta}_r$ 与两边作内积（$|\vec{\beta}_r| = 1$），得到

$$\boxed{k_r(s) = \dot{\vec{\alpha}} \cdot \vec{\beta}_r},$$

称 $k_r(s)$ 为 C 在 s 处的**相对曲率**。

*(2) $\dot{\vec{\beta}}_r$ 的表达式。*由 $|\vec{\beta}_r| = 1$，有 $\dot{\vec{\beta}}_r \perp \vec{\beta}_r$，并且 $\dot{\vec{\beta}}_r$ 平行于 Σ，所以 $\dot{\vec{\beta}}_r \parallel \vec{\alpha}$。设 $\dot{\vec{\beta}}_r = f(s)\vec{\alpha}$，则 $f(s) = \dot{\vec{\beta}}_r \cdot \vec{\alpha}$。由于 $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}_r \equiv 0$，两边求导：

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}_r) = \dot{\vec{\alpha}} \cdot \vec{\beta}_r + \vec{\alpha} \cdot \dot{\vec{\beta}}_r,$$

所以 $f(s) = \dot{\vec{\beta}}_r \cdot \vec{\alpha} = -\dot{\vec{\alpha}} \cdot \vec{\beta}_r = -k_r$，即

$$\dot{\vec{\beta}}_r = -k_r\,\vec{\alpha}.$$

（也可以直接用坐标验证：由 $\dot{\vec{\alpha}} = k_r\vec{\beta}_r$ 得 $\ddot{x} = -k_r\dot{y}$，$\ddot{y} = k_r\dot{x}$，所以 $\dot{\vec{\beta}}_r = (-\ddot{y}, \ddot{x}) = (-k_r\dot{x}, -k_r\dot{y}) = -k_r\vec{\alpha}$。）

合起来写成矩阵形式：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\\ \vec{\beta}_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & k_r\\ -k_r & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\\ \vec{\beta}_r\end{pmatrix}}$$

称为**相对 Frenet 公式**（或**平面曲线的 Frenet 公式**）。

相对曲率的计算公式

在弧长 s 为参数下，由定义

$$k_r = \dot{\vec{\alpha}} \cdot \vec{\beta}_r = (\ddot{x},\ \ddot{y}) \cdot (-\dot{y},\ \dot{x}) = \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y},$$

即

$$\boxed{k_r = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}$$

注： k_r 的几何意义（它就是切线方向角对弧长的变化率 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}s$）见本节后面“方向角”一段。

k 与 k_r、$\vec{\beta}$ 与 $\vec{\beta}_r$ 的关系

问：平面曲线上，k 与 k_r 及主法向量 $\vec{\beta}$ 与 $\vec{\beta}_r$ 的关系如何？（假设 $k>0$，这样空间曲线的 Frenet 标架才有定义。）

解：首先，C 上有两套活动标架：作为空间曲线的 Frenet 标架 $\{\vec{r};\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\}$，以及作为平面曲线的 Frenet 标架 $\{\vec{r};\vec{\alpha},\vec{\beta}_r\}$。

第一步：$\vec{\gamma} = \pm\vec{n}$。注意到 C 位于 Σ 上，$\vec{\alpha}$ 与 $\dot{\vec{\alpha}} = k\vec{\beta}$ 都平行于 Σ，所以 C 上各点的密切平面（由 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 张成）就是 Σ 的方向平面，即与 Σ 重合（方向平面相同）。因此副法向量 $\vec{\gamma}$ 垂直于 Σ，$\vec{\gamma} = \pm\vec{n}$（$\vec{n}$ 为 Σ 的单位法方向）。又因为 $\vec{\gamma}(s)$ 连续、$\vec{n}$ 是常向量，这个正负号在整条曲线上不变（在 $k>0$ 的区间上），记为 $\varepsilon = \pm 1$：$\vec{\gamma} = \varepsilon\vec{n}$。

第二步：$\vec{\beta}$ 与 $\vec{n}\times\vec{\alpha}$。进而

$$\vec{\beta} = \vec{\gamma}\times\vec{\alpha} = \varepsilon\,\vec{n}\times\vec{\alpha}.$$

第三步：$\vec{\beta}_r = \vec{n}\times\vec{\alpha}$。由 $\vec{\beta}_r$ 的定义知 $\{\vec{\alpha},\vec{\beta}_r,\vec{n}\}$ 构成右手空间的标架，所以

$$\vec{\beta}_r = \vec{n}\times\vec{\alpha}.$$

（用坐标验证：$\vec{n}=(0,0,1)$，$\vec{\alpha}=(\dot{x},\dot{y},0)$，$\vec{n}\times\vec{\alpha} = (0\cdot 0 - 1\cdot\dot{y},\ 1\cdot\dot{x} - 0\cdot 0,\ 0) = (-\dot{y},\dot{x},0) = \vec{\beta}_r$。）

第四步：结论。比较第二、三步，$\vec{\beta} = \varepsilon\vec{\beta}_r$，即 $\vec{\beta}_r = \varepsilon\vec{\beta}$。再由 $\dot{\vec{\alpha}} = k\vec{\beta}$，

$$k_r = \dot{\vec{\alpha}}\cdot\vec{\beta}_r = \varepsilon\,\dot{\vec{\alpha}}\cdot\vec{\beta} = \varepsilon\,k \qquad (\text{因} k = \dot{\vec{\alpha}}\cdot\vec{\beta}).$$

于是得到

$$\boxed{\begin{aligned} &(1)\quad k_r = \pm k = \begin{cases} k, & \vec{\gamma} = \vec{n}, \\ -k, & \vec{\gamma} = -\vec{n}; \end{cases} \\ &(2)\quad \vec{\beta}_r = \pm\vec{\beta} = \begin{cases} \vec{\beta}, & \vec{\gamma} = \vec{n}, \\ -\vec{\beta}, & \vec{\gamma} = -\vec{n}. \end{cases} \end{aligned}}$$

特别地 $k=|k_r|$。

注：

(1) 空间曲线的曲率 $k=|\dot{\vec{\alpha}}|\geq 0$ 不带符号；相对曲率 k_r 带符号，符号反映曲线向 Σ 内哪一侧弯曲：$k_r>0$ 向左（$\vec{\beta}_r$ 一侧）弯，对应 $\vec{\gamma}=\vec{n}$；$k_r<0$ 向右弯，对应 $\vec{\gamma}=-\vec{n}$。

(2) 例：圆 $\vec{r}(s)=(R\cos\frac{s}{R},\ R\sin\frac{s}{R})$ 按逆时针方向转，$\dot{\vec{\alpha}}$ 指向圆心，$k_r=\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}=\frac{1}{R}$，$\vec{\gamma}=+\vec{n}$；换成 $\vec{r}(s)=(R\cos\frac{s}{R},\ -R\sin\frac{s}{R})$（顺时针）则 $k_r=-\frac{1}{R}$，$\vec{\gamma}=-\vec{n}$，而两者的 k 都是 $\frac{1}{R}$。

(3) 和空间的 Frenet 公式比较：平面曲线 $\tau\equiv 0,\dot{\vec{\gamma}}=\vec{0}$，三个公式化为 $\dot{\vec{\alpha}}=k\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}=-k\vec{\alpha}$，用 $\vec{\beta}=\varepsilon\vec{\beta}_r$，$k=\varepsilon k_r$ 代入就是相对 Frenet 公式。相对 Frenet 标架的一个好处是：它在 $k_r=0$ 的点（拐点）处仍然有定义，而 $\vec{\beta}$ 在 $k=0$ 处没有定义。

一般参数下 k_r 的计算公式

设 xOy 平面上的曲线 $C:\ \vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$（$t$ 为一般参数，$'$ 表示对 t 求导），如下计算 $k_r=k_r(t)=?$

事实上，对于 C 上的弧长参数 s 而言，

$$\begin{aligned}k_r=k_r(s)=\dot{\vec{\alpha}}\cdot\vec{\beta}_r&=\frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}s}\cdot\vec{\beta}_r\\&=\frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\Big)\cdot\vec{\beta}_r=\frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{|\vec{r}'|}\Big)\cdot\vec{\beta}_r,\end{aligned}$$

这里用了 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=|\vec{r}'|$。（右边把 k_r 写成了 t 的函数，即 $k_r(t)=k_r(s(t))$。）

注意到

$$\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(s)=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{|\vec{r}'|}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{|\vec{r}'|}(x',y')(t),$$

另外，$\vec{\beta}_r$ 是 $\vec{\alpha}$ 逆时针旋转 90°，所以

$$\vec{\beta}_r=\frac{1}{|\vec{r}'|}(-y',x')(t).$$

代入得

$$\begin{aligned}k_r&=\frac{1}{|\vec{r}'|}\Big\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{|\vec{r}'|}(x',y')\Big),\ \frac{1}{|\vec{r}'|}(-y',x')\Big\rangle\\&=\frac{1}{|\vec{r}'|^2}\Big\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{|\vec{r}'|}\Big)(x',y')+\frac{1}{|\vec{r}'|}(x'',y''),\ (-y',x')\Big\rangle.\end{aligned}$$

内积里的第一项含 (x',y')，而 $(x',y')\cdot(-y',x')=-x'y'+y'x'=0$，所以这一项为 0；只剩第二项：

$$k_r=\frac{1}{|\vec{r}'|^3}\big\langle(x'',y''),\ (-y',x')\big\rangle=\frac{x'y''-x''y'}{|\vec{r}'|^3}.$$

即

$$\boxed{k_r(t)=\frac{1}{|\vec{r}\,'(t)|^3}\begin{vmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}}$$

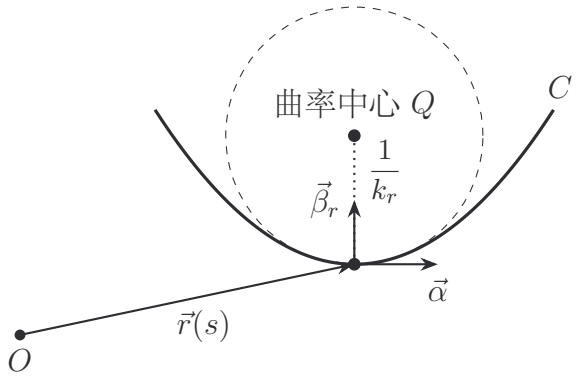
（取 $t=s$ 时 $|\vec{r}\,'|=1$，回到前面弧长参数下的公式。又对平面曲线 $|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|=|x'y''-x''y'|$，所以 $|k_r|=\dfrac{|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}=k$，与 $k=|k_r|$ 的结论一致。）

平面曲线的曲率中心

定义：对于 Σ 上的平面曲线 $C:\vec{r}=\vec{r}(s)$，设 $k_r(s)\neq 0$。称位置矢量为

$$\vec{r}(s)+\frac{1}{k_r}\vec{\beta}_r(s)$$

所对应的 Σ 上的点为 C 在 s 处的**曲率中心**。



注：平面曲线的曲率中心同时也是这条曲线作为空间曲线所对应的曲率中心（见 2.6 节：空间曲线的曲率中心为 $\vec{r}+\dfrac{1}{k}\vec{\beta}$）。

说明：由前面的结论，$k_r=\pm k$，$\vec{\beta}_r=\pm\vec{\beta}$，而且二者的正负号同时取正或同时取负（都由 $\vec{\gamma}=\pm\vec{n}$ 决定）。所以

$$\vec{r}(s)+\frac{1}{k_r}\vec{\beta}_r(s)=\vec{r}(s)+\left(\pm\frac{1}{k}\right)(\pm\vec{\beta})=\vec{r}(s)+\frac{1}{k}\vec{\beta}(s),$$

也就是说两种定义给出同一个点。（在 $\vec{\gamma}=\vec{n}$ 的情形，$\vec{\beta}_r=\vec{\beta}$，$k_r=k$，两个式子显然一致。）

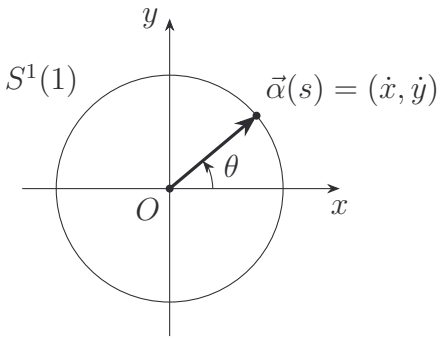
例：逆时针圆 $\vec{r}(s)=(R\cos\frac{s}{R},R\sin\frac{s}{R})$：$\vec{\alpha}=(-\sin\frac{s}{R},\cos\frac{s}{R})$，$\vec{\beta}_r=(-\cos\frac{s}{R},-\sin\frac{s}{R})$，$k_r=\frac{1}{R}$，曲率中心 $\vec{r}+R\vec{\beta}_r=\vec{0}$，即圆心。顺时针圆 $\vec{r}(s)=(R\cos\frac{s}{R},-R\sin\frac{s}{R})$：$\vec{\beta}_r=(\cos\frac{s}{R},-\sin\frac{s}{R})$，$k_r=-\frac{1}{R}$，曲率中心 $\vec{r}-R\vec{\beta}_r=\vec{0}$，也是圆心。

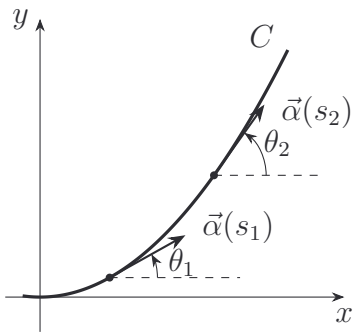
平面曲线的另一个参数：方向角 θ

首先设平面曲线 C：$\vec{r}=\vec{r}(s)=(x(s),y(s))$ 为 xOy 平面上的曲线，s 为弧长参数。根据 $\vec{\alpha}(s)=\dot{\vec{r}}(s)=(\dot{x},\dot{y})$ 知，点 $(\dot{x},\dot{y})$ 位于 xOy 平面的单位圆周 $S^1(1)$ 上。从而可以

考虑（至少在 s 的局部范围内）取 $\vec{\alpha}(s)$ 与 x 轴正向之间、由 x 轴正向到 $\vec{\alpha}$ 的夹角 θ 作为参数，即

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos\theta, \\ \dot{y} = \sin\theta, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = (\cos\theta,\ \sin\theta).$$





说明：板书上写的是“由于 $\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\right| = 1$，至少局部范围内 θ 与 s 可互为参数（一一对应）”。这里需要区分两件事：(i) θ 作为 s 的函数 $\theta = \theta(s)$ 总是存在的（见本小节末的补充）；(ii) 反过来把 θ 当作参数、s 看成 θ 的函数，则需要 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}s = k_r \neq 0$，此时由反函数定理在局部成立。

于是，对 x, y 积分（取定 s_0），得

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int_{s_0}^{s} \cos\theta\,\mathrm{d}s + x(s_0), \\ y = \displaystyle\int_{s_0}^{s} \sin\theta\,\mathrm{d}s + y(s_0). \end{cases}$$

另一方面，对 $\dot{x} = \cos\theta$，$\dot{y} = \sin\theta$ 再求一次导数（θ 是 s 的函数），

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}.$$

代入相对曲率的计算公式，

$$k_r = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix} = \cos\theta \cdot \cos\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - \sin\theta \cdot \left(-\sin\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right) = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s},$$

即

$$\boxed{k_r = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\theta(s) = \theta(s_0) + \int_{s_0}^{s} k_r\,\mathrm{d}s}$$

几何意义：$k_r = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}s$ 是切线方向角对弧长的变化率。$k_r > 0$ 时切线向逆时针方向转（曲线向 $\vec{\beta}_r$ 所在的左侧弯），$k_r < 0$ 时向顺时针方向转；$\theta(s) - \theta(s_0)$ 就是从 s_0 到 s 切线所转过的（带符号的）总角度。

补充（θ 在整个区间上的存在性）：设 k_r 在区间 I 上连续，$s_0 \in I$，取 θ_0 使 $\vec{\alpha}(s_0) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$。令

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_{s_0}^{s} k_r \,\mathrm{d}s, \qquad \vec{a}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s)).$$

记 J 为逆时针旋转 90° 的矩阵，则 $\vec{a}\,' = \theta'(-\sin\theta, \cos\theta) = k_r J\vec{a}$；而相对 Frenet 公式给出 $\dot{\vec{\alpha}} = k_r\vec{\beta}_r = k_r J\vec{\alpha}$。令 $f(s) = |\vec{\alpha} - \vec{a}|^2$，则

$$f' = 2(\vec{\alpha} - \vec{a}) \cdot (\dot{\vec{\alpha}} - \vec{a}\,') = 2k_r\,(\vec{\alpha} - \vec{a}) \cdot J(\vec{\alpha} - \vec{a}) = 0,$$

这是因为对任何向量 $\vec{v}$ 都有 $\vec{v} \cdot J\vec{v} = 0$。又 $f(s_0) = 0$，所以 $f \equiv 0$，即 $\vec{\alpha}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ 在整个区间上成立。此外，满足这一关系的连续函数 θ 至多相差 2π 的整数倍（两个这样的函数之差连续且取值于 $2\pi\mathbb{Z}$，故为常数）。

总结：平面曲线由相对曲率唯一确定

总结：给定一个连续可微函数 $k_r = k_r(s)$，则在相差一个刚体运动下，唯一确定一条 xOy 平面上的曲线 $\vec{r} = (x(s), y(s))$：

$$\begin{cases} \theta = \theta(s_0) + \displaystyle\int_{s_0}^{s} k_r(s)\,\mathrm{d}s, \\ x = x(s_0) + \displaystyle\int_{s_0}^{s} \cos\theta\,\mathrm{d}s, \\ y = y(s_0) + \displaystyle\int_{s_0}^{s} \sin\theta\,\mathrm{d}s, \end{cases}$$

称 θ 为 C 在 s 处的**方向角**。

说明（板书上没有展开的部分，供参考）：这里的刚体运动指保持定向的刚体运动（旋转加平移）。

存在性：任取初值 $\theta(s_0), x(s_0), y(s_0)$，按上面三式依次定义 θ, x, y。则 $\dot{x} = \cos\theta$，$\dot{y} = \sin\theta$，所以 $|\dot{\vec{r}}| = 1$，s 就是弧长参数；再由 $\ddot{x} = -\theta'\sin\theta$，$\ddot{y} = \theta'\cos\theta$ 得 $\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix} = \theta' = k_r$，即这条曲线的相对曲率正是给定的 k_r。

唯一性：反过来，若 $\tilde{C}:\tilde{\vec{r}} = \tilde{\vec{r}}(s)$ 是另一条以 s 为弧长参数、相对曲率也是 $k_r(s)$ 的曲线，则由前面的结论，其方向角 $\tilde{\theta}$ 满足 $\tilde{\theta}(s) = \tilde{\theta}(s_0) + \int_{s_0}^{s} k_r\,\mathrm{d}s$，于是 $\tilde{\theta}(s) = \theta(s) + \varphi$，其中常数 $\varphi = \tilde{\theta}(s_0) - \theta(s_0)$。因此

$$\dot{\tilde{\vec{r}}} = (\cos(\theta+\varphi), \sin(\theta+\varphi)) = R_\varphi\,\dot{\vec{r}}, \qquad R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

积分得 $\tilde{\vec{r}}(s) = R_\varphi\big(\vec{r}(s) - \vec{r}(s_0)\big) + \tilde{\vec{r}}(s_0)$，也就是说 $\tilde{C}$ 可由 C 经旋转 R_φ 与平移得到。（用复数记号：令 $z = x + \mathrm{i}y$，$K(s) = \int_{s_0}^{s} k_r\,\mathrm{d}\sigma$，则 $z(s) = z(s_0) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(s_0)}\int_{s_0}^{s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}K(\sigma)}\,\mathrm{d}\sigma$，而 $\tilde{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(z - z(s_0)) + \tilde{z}(s_0)$。）

反之：旋转加平移保持弧长，也保持 $\det(\vec{r}', \vec{r}'')$（旋转矩阵行列式为 1），所以保定向的刚体运动不改变 k_r。（若是反射，则 k_r 变号。）

注：与空间曲线的分类定理（见前面“曲线分类定理”一节，需要求解 Frenet 方程组）相比，平面曲线的情形只需要作积分，结论也更简单：平面曲线的形状完全由相对曲率 $k_r(s)$ 决定。

闭曲线、简单闭曲线与分段光滑曲线

定义：设 $C:\ \vec{r} = \vec{r}(s),\ s \in [a, b]$。若满足

1) $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$;

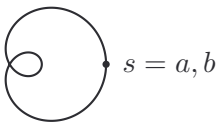
2) $\vec{r}^{(k)}(a) = \vec{r}^{(k)}(b),\ \forall k = 1, 2, \ldots$;

3) $\vec{r}(s)$ 光滑，

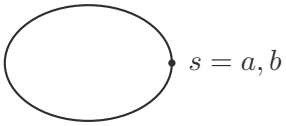
则称 C 为（光滑）**闭曲线**。

定义：对于 $C:\ \vec{r} = \vec{r}(s),\ s \in [a, b]$，若除 $s = a$ 与 b 以外无自交点，则称 C 为**简单闭曲线**。

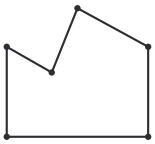
分段光滑曲线：由有限条光滑曲线段首尾相接而成的曲线（连接处允许出现“角点”，即左右切向不同），称为**分段光滑曲线**。（板书只写了标题并画了一个带角点的多边形图形，这里的文字是补充。）



闭曲线（有自交点）



简单闭曲线



分段光滑曲线（含角点）